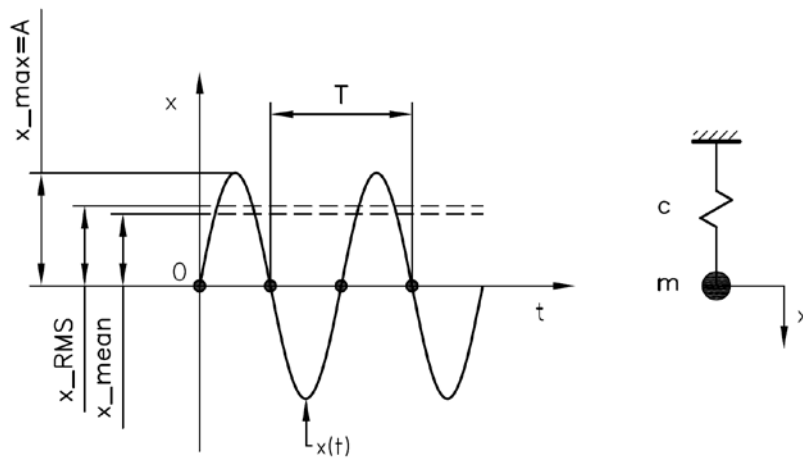


Dinamika obradnih sistema

Obradni sistem je dinamički sistem. Sile rezanja i drugi izvori promenljivog opterećenja koji se pojavljuju u radu obradnog sistema su dinamičke prirode u svojoj osnovi. Sile rezanja su kroz okvir tehnologije mašingradnje posmatrane kao statičke veličine. Zanimarivanje njihove dinamičke prirode bilo je namerno, sa ciljem da se ekstremno složeni fenomeni koji prate proces odvajanja strugotine pojednostave. Ipak, za potpuno razumevanje procesa rezanja i rada jednog obradnog sistema, dinamička priroda svih fenomena koji prate proces rezanje mora da bude uzeta u obzir. Razlog je vrlo jednostavan. Dinamika uvek podrazumeva pomeraj neke strukture. U kontekstu obradnih sistema, taj pomeraj ima sasvim očigledne implikacije na tačnost procesa rezanja. Postoje i drugi aspekti, kao što je habanje alata i tome slično, ali tačnost je od primarnog značaja. Istraživanje dinamičkog ponašanja elastomehaničke strukture obradnog sistema pokazaće da ključna veličina u ovom kontekstu, a to je krutost, ima novi značaj i da je moguće opšti pojam krutosti razdvojiti na statičku krutost i dinamičku krutost.

Osnovni pojmovi, podsećanje

Jednomaseni oscilator bez prigušenja, sastoji se iz koncentrisane mase (m) vezane za oslonac preko opruge krutosti (c). Model je prikazan na slici 1.



Slika 1

Izvodjenjem iz ravnoteže, ovakav sistem počinje da osciluje oko ravnotežnog položaja ($x = 0$) sa periodom T , frekvencijom $f = 1/T$ koja se izražava u Hercima (Hz) i amplitudom A . Perioda T je vremenski interval između dva identična sukcesivna stanja.

Ovakav oscilatorni sistem nazivamo i harmonijskim oscilatorom. On je linearan i kretanje koncentrisane mase u vremenu, odnosno njen pomeraj u odnosu na ravnotežno stanje opisuje se sledećom trigonometrijskom jednačinom koja je funkcija vremena:

$$x = A \sin\left(2\pi \frac{1}{T} t\right) = A \sin(2\pi f t) = A \sin(\omega t)$$

Diferenciranjem jednačine pomeraja po vremenu dobijaju se jednačine koje definišu brzinu i ubrzanje:

$$\frac{d}{dt}x = \dot{x} = A\omega\cos(\omega t)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}x = \ddot{x} = -A\omega^2\sin(\omega t)$$

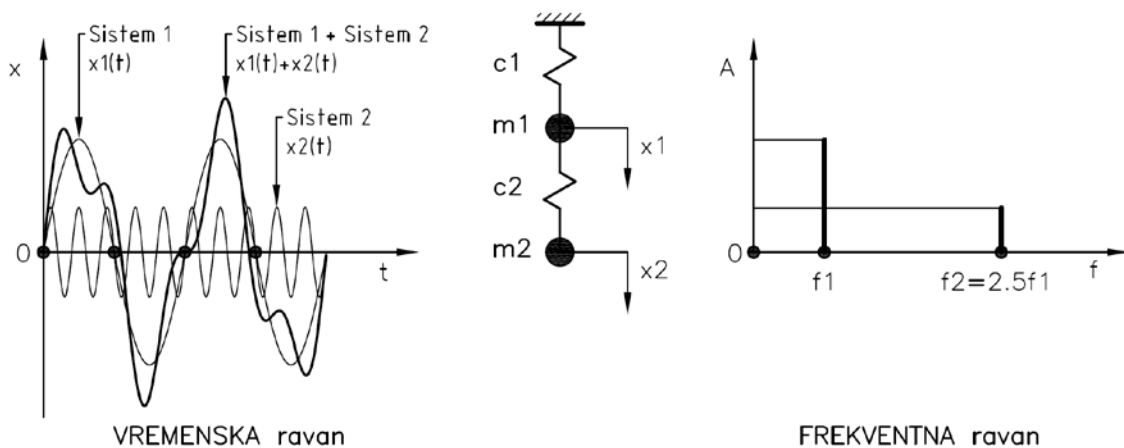
U prethodno navedenim jednačinama, frekvencija je izražena u takozvanoj kružnoj frekvenciji, (ω) čija je jedinica (rad/s). U praksi, pomeraj se meri beskontaktnim senzorom. Brzina takodje. Ubrzanje se meri akcelometrom i sa aspekta identifikacija i analiza ove vrste pojava kod obradnih sistema ima poseban značaj, praktično dominantna tehnologija.

Srednja aritmetička vrednost oscilacija, kao i srednja kvadratna (RMS) vrednost oscilacija, definisane su sledećim relacijama:

$$x_{mean} = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)| dt = 0.637A$$

$$x_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x(t)^2 dt} = \frac{\sqrt{2}}{2} A = 0.707A$$

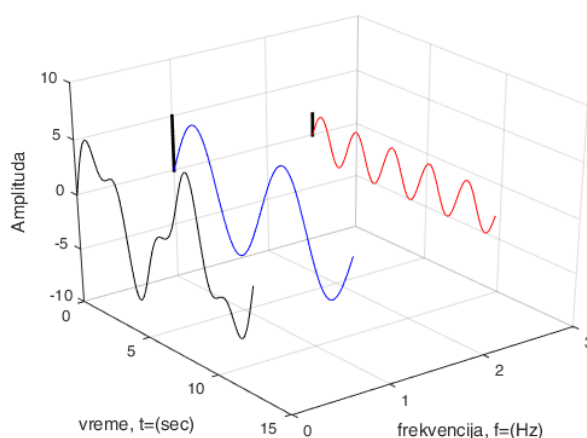
Jednomaseni harmonijski oscilator je, sa aspekta prakse, specijalni slučaj. U realnosti oscilacije jednog obradnog sistema su mnogo kompleksnije i aproksimativno se mogu posmatrati kao oscilacije složenog sistema sa velikim brojem međusobno spregnutih jednomasenih oscilatora. Oscilacije tih prostih, jednomasenih oscilatora se superponiraju, što vodi ka novom konceptu, konceptu neharmonijskog oscilatora. Ovaj kontekst se ilustruje primerom oscilatora sa dve mase, kao što je prikazano na slici 2.



Slika 2

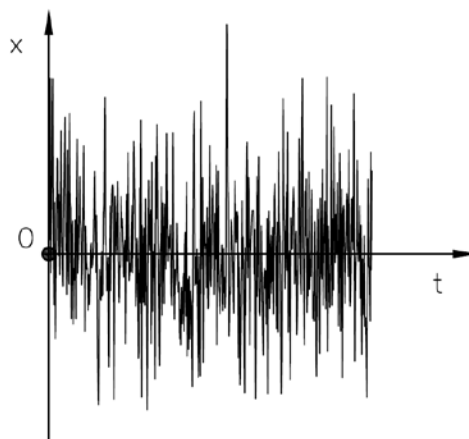
Moguće je uočiti kako se superpozicijom dve harmonijske oscilacije, čiste sinusoide, generiše jedan aperiodični signal, gotovo haotičnog oblika kretanja. Povećanjem broja jednomasenih oscilatora dolazi se do vrlo složenih oblika oscilovanja. Ipak, superpozicija linearnih sistema uvek vodi ka linearnom determinističkom sistemu, koji može da se precizno modelira i čije je ponašanje prediktivno, bez obzira na to kakvu kompleksnost u dinamičkom ponašanju on ostvaruje. Dalje, u ovom slučaju vremenski zapis na kojem se prikazuje rezultatni pomeraj posmatrane tačke u vremenu, a koji se prikazuje u takozvanoj

vremenskoj ravni, može se prevesti u frekventni domen, u kojem se dinamička svojstva razmatranog sistema posmatraju u frekventnoj ravni, određenom koordinatnim sistemom koji čine frekventna osa i osa na kojoj se prikazuju amplitude oscilovanja na pojedinim frekvencijama. Ovim se oslobadjamo vremena. Prelaz iz vremenskog u frekventni domen omogućava jednostavniju analizu i bolje razumevanje kompozicije dinamičkog sistema, odnosno dinamike neke složene elastomehaničke strukture. Na slici 3 prikazan je prostorni dijagram koji objedinjuje vremensku i frekventnu ravan. Plavom bojom prikazano je kretanje mase prvog prostog oscilatora, crvenom bojom prikazano je kretanje mase drugog prostog oscilatora, a njihovo superponirano kretanje prikazano je u vremenskoj ravni linijom crne boje. Ortogonalno na vremensku ravan naslonjena je frekventna ravan i ona prikazuje dve frekvencije na kojima osciluju prvi i drugi oscilator, kao i amplitudu tih oscilacija. Postoje posebne tehnike koje sadržaj iz vremenske ravni transformišu u ekvivalentni sadržaj u frekventnoj ravni. To su tehnike Furijeove analize, odnosno dekompozicije složenog vremenskog signala u njegove frekventne komponente, odnosno spektar.



Slika 3

Pored prethodno opisanih neharmonijskih oscilacija postoji i jedna posebna klasa koju nazivamo stohastičkim oscilacijama. Te oscilacije generišu složeni sistemi nedeterminističkog tipa, odnosno izvori koji sadrže slučajne procese, koji se ne mogu opisati nikakvim diferencijalnim jednačinama, već samo mogu da se karakterišu stohastičkim parametrima. Konkretno, stanje sistema u nekom narednom trenutku, bez obzira na to što poznamo njegovu kompletnu istoriju, ne može se precizno odrediti, već se samo može izraziti verovatnoća njegovog pojavljivanja.



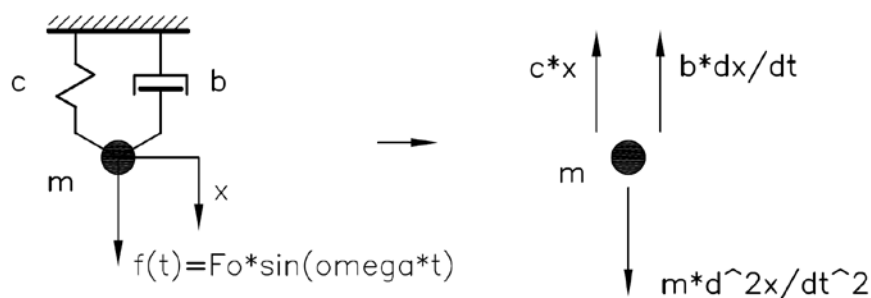
Slika 4

Spektar stohastičkih signala je kontinualan, odnosno beskonačno bogat komponentama. U zavisnosti od profila spektra razlikujemo različite vrste stohastičkih sistema. Tako na primer, imamo sisteme koji generišu isti intenzitet signala na svim frekvencijama, odnosno imaju uniformni spektar (takozvani beli šum), ili signale koji potiču od procesa koje karakterišemo normalnom, odnosno Gausovom raspodelom, $N = p(\mu, \sigma)$, koja je određena sa dva parametra, srednjom vrednošću i disperzijom, (takozvani obojeni šum).

Realni sistemi su uvek kombinacija determinističkog i nedeterminističkog sistema.

Analitički model jednomasenog oscilatora

Polazimo od opšteg modela jednomasenog oscilatora koji obuhvata inercijalnu komponentu, disipativnu komponentu, elastičnu komponentu i spoljašnju pobudu, što nas vodi ka slučaju oscilatornog prigušenog sistema sa spoljašnjom pobudom (prinudne, prigušene oscilacije). Model je prikazan na slici 5.



Slika 5.

Primenom drugog Njutnovog zakona sledi:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = f(t) - cx - b \frac{dx}{dt}$$

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = f(t) = F_0 \sin(\omega t)$$

pri čemu je sopstvena, odnosno prirodna frekvencija ovog sistema određena sledećom relacijom:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$$

a kritično prigušenje:

$$b_k = 2m \sqrt{\frac{c}{m}} = 2m\omega_0$$

Obratiti pažnju na činjenicu da prigušenje ne utiče na vrednost sopstvene frekvencije. Sopstvena frekvencija je određena samo elastičnim i masenim karakteristikama noseće strukture. Amplituda oscilacija elastoviskoznog sistem određena je sledećom relacijom:

$$A = \frac{\frac{F_0}{c}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2 \frac{b}{b_k} \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

pri čemu je $F_0/c = x_{st}$. Statički pomeraj x_{st} određen je amplitudom dinamičke pobudne sile, F_0 . Fazni pomeraj oscilacija je definisan sledećom relacijom:

$$\tan \varphi = -\frac{2 \frac{b}{b_k} \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

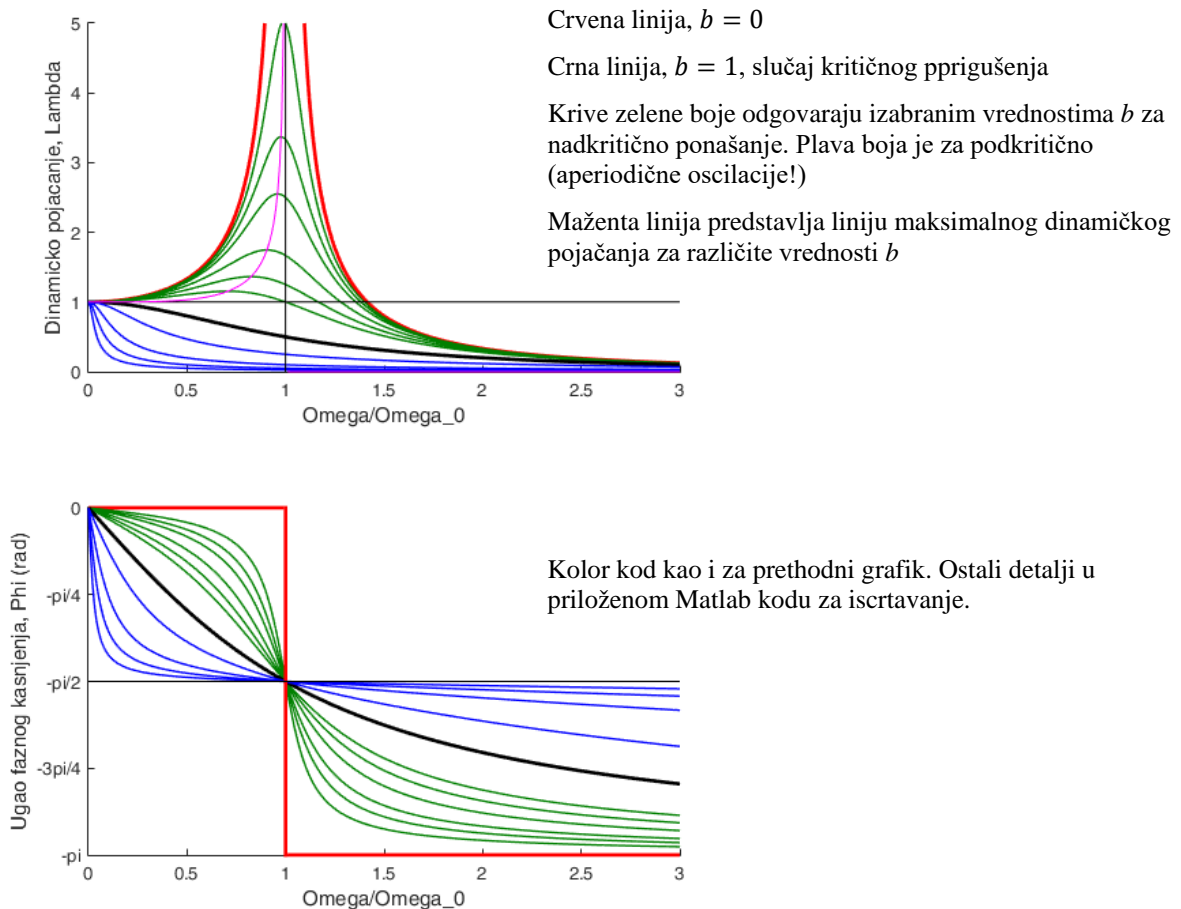
Jednačina kretanja ovog sistema sada glasi:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi)$$

Faktor dinamičkog pojačanja oscilacija, odnosno odnos amplitude dinamičkih oscilacija A i statičkog pomeraja $x_{st} = F_0/c$ određen je sledećom relacijom:

$$\lambda = \frac{A}{x_{st}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2 \frac{b}{b_k} \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

Grafički prikaz faktora dinamičkog pojačanja u funkciji relativnog odnosa sopstvene frekvencije i frekvencije spoljašnje pobude naveden je na slici 6. Takođe, na slici 6 je prikazan i njemu pripadajući dijagram ugla faznog kašnjenja.



Slika 6.

Dinamička krutost sistema, koja je određena parametrima dinamičkog sistema i frekvencijom spoljašnje pobude ω :

$$c_{din} = \frac{F}{A} = \frac{F}{x_{st}} \frac{1}{\lambda} = f(\omega)$$

Razumevanje fizičkog ponašanja jednomasenog oscilatora prikazanog dijagramima dinamičkog pojačanja amplitude i faznog kašnjenja je od suštinskog značaja. Horizontalna osa na oba dijagrama iskazuje odnos ω/ω_o odnosno odnos sopstvene frekvencije dinamičkog sistema i frekvencije spoljašnje pobude (frekvencija pobude normirana sopstvenom frekvencijom!). Vertikalna osa pokazuje odziv dinamičkog sistema na spoljašnju dinamičku pobudu i to njegovu relativnu amplitudu, odnosno amplitudu normiranu sa statičkim pomerajem koji izaziva amplituda spoljašnje pobude F_o .

Na oba dijagrama treba uočiti na horizontalnoj osi jediničnu vrednost, odnosno vrednost na kojoj je frekvencija spoljašnje pobude jednaka sopstvenoj frekvenciji sistema. Ova karakteristična vrednost odgovara stanju sistema koji nazivamo rezonansom. Dakle, za rezonansu važi da je $\omega/\omega_o = 1$. Ta vrednost deli oba dijagrama na levu i desnu polovinu, u kojima prepoznamo suštinski različito ponašanje. Leva strana oba dijagrama prikazuje podkritično ponašanje dinamičkog sistema, dok desna strana prikazuje nadkritično stanje. Prelazna vrednost, $\omega/\omega_o = 1$ karakteriše se dramatičnom promenom tipa diskontinuiteta i predstavlja jedan od 4 karakteristična stanja oscilatornog sistema posmatrano po horizontalnoj, frekventnoj osi (statičko, podkritično, rezonansa i nadkritično). Za potpuno razumevanje stanja rezonanse treba uzeti u obzir stepen prigušenja sistema. U slučaju nultog prigušenja dinamičkog sistema, faktor dinamičkog pojačanja oscilacija odlazi u beskonačnost, sistem dobija maksimalnu amplitudu i teorijski, a i praktično, dolazi do njegovog razaranja zbog akumulacije mehaničke energije tokom vremena. Paralelno, pripadajući fazni ugao ima diskontinuitet, odnosno odskočno menja vrednost za $-\pi$ radijana, odnosno koncentrisana masa koja je sledila smer pobudne sile u podkritičnom domenu, u nadkritičnom menja smer za $-\pi$ radijana i suprotstavlja se dejstvu spoljašnje pobude. Upravo ova činjenica, odnosno promena smera kretanja koncentrisane mase u odnosu na smer spoljašnje pobude objašnjava drastični pad dinamičkog pojačanja amplitude, kada faktički dolazi do njenog prigušenja, jer faktor dinamičkog pojačanja postaje manji od jedinice, odnosno važi: $\lambda < 1$ ukoliko je sistem dovoljno daleko od rezonanse (uvek ako je $\omega/\omega_o > \sqrt{2}$). Treba uočiti da $\lambda > 1$ predstavlja dinamičko pojačanje oscilacija, dok $\lambda < 1$ označava dinamičko slabljenje, ili dinamičko prigušenje, kada amplituda oscilovanja postaje manja od statičkog pomeraja x_{st} . Statička vrednost amplitude je određena sa $\omega/\omega_o = 0$, dakle u koordinatnom početku dinamičke ose sistema ω/ω_o sistem se transformiše u statički (specijalni slučaj na ovom dijagramu!). Lokacija ekstremuma za dinamičko pojačanje može se analitički dobiti diferenciranjem izraza dinamičkog pojačanja po ω/ω_o odakle sledi:

$$\lambda_{max} = \frac{d}{d(\omega/\omega_o)} \lambda = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_o^2})^4}}$$

Vrednost koeficijenta prigušenja takodje ima značajan uticaj na karakter oscilacija. Ukoliko je njegova vrednost manja od kritične, odnosno ako je $b < b_k$ oscilacije sistema su periodične. U slučaju da je $b > b_k$ onda oscilacije sistema postaju aperiodične.

Matlab programski kod kojim je iscrtan grafik dinamičkog pojačanja i ugla kašnjenja:

```
% =====
% grafik dinamičkog pojačanja oscilacija i faznog kašnjenja
figure1 = figure(3)
subplot2 = subplot(2,1,2, 'Parent',figure1, 'YTickLabel', {'-pi','-3pi/4','-pi/2','-pi/4','0'},...
'YTick', [-3.141592 -2.3562 -1.5708 -0.7854 0]);
```

```

omega = 0:0.01:5; %vektor omega/omega_0
bk=[0, 0.5, 0.1, 0.15 0.2, 0.3, 0.4 0.5 1 2 5 10 20]; % izabrane vrednosti kritičnog prigušenja
for i=1:length(bk)
Lambda(i,:) = 1./sqrt((1-omega.^2).^2 + (2.*bk(i).*omega).^2); %faktor dinamičkog pojačanja
subplot(2,1,1), hold on
    if bk(i)==0
        plot(omega, Lambda(i,:), 'r', 'LineWidth', 2)
    elseif bk(i)==1
        plot(omega, Lambda(i,:), 'k', 'LineWidth', 2)
    else
        if bk(i)>1
            plot(omega, Lambda(i,:), 'b', 'LineWidth', 1)
        else
            plot(omega, Lambda(i,:), 'Color',[0 0.5 0], 'LineWidth', 1)
        end
    end
end
xlabel('Omega/Omega_0','Interpreter', 'none')
ylabel('Dinamičko pojačanje, Lambda')
xlim([0 3]),ylim([0 5]);

Fi(i,:)=atan(-(2.*bk(i).*omega)./(1-omega.^2)); %ugao faznog kašnjenja
for j=1:length(omega) %korekcija znaka atan funkcije
    if omega(j)>1
        Fi(i,j)=Fi(i,j)-pi;
    end
end
subplot(2,1,2), hold on
if bk(i)==0
    plot(omega, Fi(i,:), 'r', 'LineWidth', 2)
elseif bk(i)==1
    plot(omega, Fi(i,:), 'k', 'LineWidth', 2)
else
    if bk(i)>1
        plot(omega, Fi(i,:), 'b', 'LineWidth', 1)
    else
        plot(omega, Fi(i,:), 'Color',[0 0.5 0], 'LineWidth', 1)
    end
end
end
xlim([0 3]), ylim([-pi 0]);
xlabel('Omega/Omega_0', 'Interpreter', 'none')
ylabel('Ugao faznog kašnjenja, Phi (rad)')
%yticks([0 -pi/2 -pi])
end
subplot(2,1,1) % Dodavanje pomocnih linija
plot([1,1],[0,5], 'k')
plot([0,3],[1,1], 'k')
pik=1./sqrt(1-omega.^4); % kriva maksimuma dinamičkog pojačanja
plot(omega, pik, 'm')
hold off
subplot(2,1,2) % dodavanje pomocnih linija
plot([1,1],[0,-pi], 'r', 'LineWidth', 2)
plot([0,3],[-pi/2,-pi/2], 'k')
hold off
set(gcf, 'Position', [500 10 560 750]) % pozicioniranje grafika na ekranu
% =====

```

Kod projektovanja obradnih sistema, noseću strukturu treba tako oblikovati da se stanje rezonanse nikada na pojavi. Takođe noseća struktura treba da ima što je moguće veći koeficijent prigušenja. Prigušenje ove vrste po pravilu potiče od interkristalnog trenja u materijalu iz kojeg je noseća struktura izradjena. Sivi liv ima značajno veću vrednost interkristalnog trenja u odnosu na čelik. Zbog toga se noseća struktura obradnih sistema izradjuje od sivog liva, uvek kada je to moguće (ekonomski i ekološki opravdano).

Matrični oblik Lagranžovih jednačina

Za sistem sa n stepeni slobode važi sledeće:

$$\text{kinetička energija sistema: } E_k = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n m_{i,j} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

$$\text{potencijalna energija sistema: } E_p = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n c_{i,j} q_i q_j$$

što u matričnom obliku glasi:

$$E_k = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T [M] \{\dot{q}\}$$

$$E_p = \frac{1}{2} \{q\}^T [C] \{q\}$$

gde su: $\{q\}$ – vektor generalisanih koordinata, $\{\dot{q}\}$ – vektor generalisanih brzina, $[M]$ matrica masa i inercijalnih momenata i $[C]$ matrica krutosti. Primenom Lagranžovih jednačina drugog reda za slučaj malih oscilacija sistema (primenjuju se trigonometrijske aproksimacije koje analitički model pretvaraju u linearni!):

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} \right\} - \left\{ \frac{\partial E_k}{\partial q_j} \right\} + \left\{ \frac{\partial E_p}{\partial q_j} \right\} = \{Q\}$$

gde se pojedini članovi mogu zapisati kao:

$$\left\{ \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} \right\} = [M] \{\dot{q}\}$$

$$\left\{ \frac{\partial E_p}{\partial q_j} \right\} = [C] \{q\}$$

dolazi se do matričnog sistema linearnih diferencijalnih jednačina drugog reda:

$$[M] \{\ddot{q}\} + [C] \{q\} = \{Q\} \quad \text{Prinudno oscilovanje sistema bez prigušenja (A)}$$

$$[M] \{\ddot{q}\} + [C] \{q\} = \{0\} \quad \text{Slobodno oscilovanje sistema bez prigušenja (B)}$$

Uvodjenjem i treće, disipativne komponente:

$$\Phi = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T [B] \{\dot{q}\}$$

gde je sa $[B]$ označena matrica prigušenja sistema, dolazi se i do trećeg karakterističnog oblika modela dinamičkog ponašanja elastomehaničke strukture:

$$[M] \{\ddot{q}\} + [B] \{\dot{q}\} + [C] \{q\} = \{Q\} \quad \text{Prinudno oscilovanje sistema sa prigušenjem (C)}$$

Analitičko rešavanje dinamičkih jednačina oscilatornog sistema podrazumeva određivanje sopstvenih vrednosti, odnosno sopstvenih frekvencija, i sopstvenih vektora, odnosno oblika oscilovanja. Ovim se ulazi u jednu posebnu oblast elastomehanike koju nazivamo modalnom analizom. Modalna analiza je vrlo bitan alat za izučavanje dinamičkog ponašanja nekog sistema, i na bazi toga, njegove optimizacije u

inženjerskom projektovanju. Ona takodje ima velikog značaja i u eksperimentalnom delu projektnih aktivnosti i takodje, u održavanju.

Ukoliko se krene od jednačine dinamičkog sistema u režimu slobodnih oscilacija, jednačina (B), onda se množenjem sa leve strane sa $[M]^{-1}$ može napisati:

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{q\} = \{0\} \quad / [M]^{-1}$$

$$\{\ddot{q}\} + [M]^{-1}[C]\{q\} = \{0\}$$

$$[M]^{-1}[C] = [H]$$

$$\{\ddot{q}\} + [H]\{q\} = \{0\}$$

gde je član $[M]^{-1}[C] = [H]$ predstavlja dinamičku matricu sistema koja u sebi nosi sve informacije o dinamici razmatranog sistema sa aspekta modalne analize.

Dalje se može pretpostaviti da postoji neki koordinatni sistem određen skupom koordinata $\{p\}$ u kojem važi:

$$\{\ddot{p}\} + [\Lambda]\{p\} = \{0\}$$

gde je sa $[\Lambda]$ označena dijagonalna matrica, odnosno $[\Lambda] = \text{dijag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$. Veza između dve baze, odnosno dva koordinatna sistema je linearna i definisana je sledećom relacijom:

$$\{q\} = [\mu]\{p\}$$

Matrica $[\mu]$ u ovom slučaju predstavlja matricu kojom se polazni koordinatni sistem preslikava u novouvedeni. Smenom ove transformacione relacije u dinamičku jednačinu sistema u režimu slobodnih oscilacija, (B), sledi:

$$[\mu]\{\ddot{p}\} + [H][\mu]\{p\} = \{0\} \quad / [\mu]^{-1}$$

$$\{\ddot{p}\} + [\mu]^{-1}[H][\mu]\{p\} = \{0\}$$

odakle dalje sledi da je nepoznata dijagonalna matrica $[\Lambda]$ definisana sledećom relacijom:

$$[\Lambda] = [\mu]^{-1}[H][\mu]$$

Ovim transformacijama i prelaskom na dijagonalizovani oblik dinamičke matrice elastomehaničkog sistema, sistem se ortogonalizuje, pa se time vrši njegovo raspredanje i umesto sistema spregnutih linearnih jednačina, dolazi se do mnogo povoljnijeg oblika za rad, do ekvivalentnog sistema diferencijalnih linearnih jednačina drugog reda koje su međusobno nespregnute, odnosno važi:

$$\ddot{p}_r + \lambda_r p_r = 0, \quad r = 1, 2, \dots, n$$

čije je rešenje identično onom koje je već izvedeno u prethodnim razmatranjima:

$$p_r = A_r \sin(\omega_r + \psi_r)$$

i gde sopstvene vrednosti dinamičke matrice $[\Lambda]$, odnosno njeni dijagonalni elementi imaju fizički smisao kvadrata sopstvene frekvencije:

$$\omega_r^2 = 1/\lambda_r$$

Koordinate $\{p\}$ se nazivaju glavnim koordinatama sistema, a korespondentni oblici oscilovanja glavni oblici oscilovanja.

Treba uočiti da se skup generalisanih koordinata proizvoljno bira. Skup glavnih koordinata je, međutim, jedinstven! To je jedini skup koordinata koje su međusobno ortogonalne. Ortogonalnost znači raspregnutost, što ima poseban značaj za modalnu analizu jer omogućava da se sistemi sa vrlo velikim brojem stepeni slobode matematički dekomponuju na prost skup nespregnutih prostih, jednomasenih oscilatora, čime se dalje omogućava analiza ponašanja sistema za svaku od sopstvenih vrednosti λ_r nezavisno.