Mašinski fakultet Univerziteta u Beogradu
Katedra za proizvodno mašinstvo
Laboratorija za kibernetiku i mehatronske sisteme - CMSysLab
Predmet: Projektovanje obradnih sistema
Predmetni nastavnik: Prof. Petar B. Petrović

Beograd 2020.04.19

Dinamička jednačina konačnog elementa

Dodavanjem inercijalnih atributa, konačni elementi sa mogu efikasno primeniti u modeliranju nosećih struktura obradnih sistema.

Specifična inercijalna sila je definisana relacijom:

$$-\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}\{f\}$$

pri čemu je ρ gustina, a f funkcija pomeraja, koja je razmatrana u statici konačnih elemenata.

Analogno, moguće je zapisati i specifičnu silu viskoznog prigušenja, označavajući sa β koeficijent proporcionalnosti:

$$-\beta \frac{\partial}{\partial t}\{f\}$$

Izjednačavajući radove spoljašnjih i unutrašnjih sila, i uzimajući da je $\{f\}_{(k)} = [N]\{\delta\}_{(k)}$ sledi dinamička jednačina konačnog elementa:

$$[m]_{(k)} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\{\delta\}_{(k)} + [b]_{(k)} \frac{\partial}{\partial t}\{\delta\}_{(k)} + [k]_{(k)}\{\delta\}_{(k)} = \{F(t)\}_{(k)}$$

gde je:

inercijalna matrica → $[m]_{(k)} = \int_V [N]^T \rho [N] dV$

matrica prigušenja → $[b]_{(k)} = \int_V [N]^T \beta [N] dV$

Šema sastavljanja za skup medjusobno spregnutih konačnih elemenata i formiranje inercijalne matrice sistema (matrica masa) i disipativne matrice sistema, analogna je šemi sastavljanja ukupne matrice krutosti koja je razmatrana u okviru statike konačnih elemenata, odnosno važi:

$$[M] = \sum_{(k)} [m_{r,s}]_{(k)}$$

$$[B] = \sum_{(k)} [b_{r,s}]_{(k)}$$

što nas vodi do konačnog oblika:

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [B]\{\dot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = \{F(t)\}$$

Sa $\{\ddot{\delta}\}$ označen je vektor ubrzanja čvornih tačaka, $\{\dot{\delta}\}$ je vektor brzina čvornih tačaka a $\{F(t)\}$ je spoljašnja pobuda koja je funkcija vremena (dinamička pobuda, za razliku od pobude u statičkom domenu).

Matrica mase konačnog elementa

- Konačni elemenat u obliku štapa:

$$[m_{r,s}]_{(k)} = \rho A I \int_L N_r N_s \, dz, \ \ (r,s = i,j)$$

ako integral ima vrednost:

$$\int_L N_r N_s \, dz = \begin{cases} \dfrac{L^3}{3}, & r = s \\ \dfrac{L^3}{6}, & r \neq s \end{cases}$$

onda inercijalna matrica glasi:

$$[m]_{(k)} = \begin{bmatrix} m_{i,i} & m_{i,j} \\ m_{j,i} & m_{j,j} \end{bmatrix} = \frac{m_k}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & & 0 & 1 \\ & \cdots & & & \cdots \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

pri čemu je $m_k = \rho A L$ masa konačnog elementa.

- Konačni elemenat u obliku trougla:

$$[m_{r,s}]_{(k)} = \rho t I \int_\Delta N_r N_s \, dxdy, \ \ (r,s = i,j,m)$$

pri čemu je sa t označena debljina konačnog elementa, a Δ je njegova površina. Analogno slučaju štapa, može se napisati:

$$\int_\Delta N_r N_s \, dxdy = \begin{cases} \dfrac{1}{6}\Delta, & r = s \\ \dfrac{1}{12}\Delta, & r \neq s \end{cases}$$

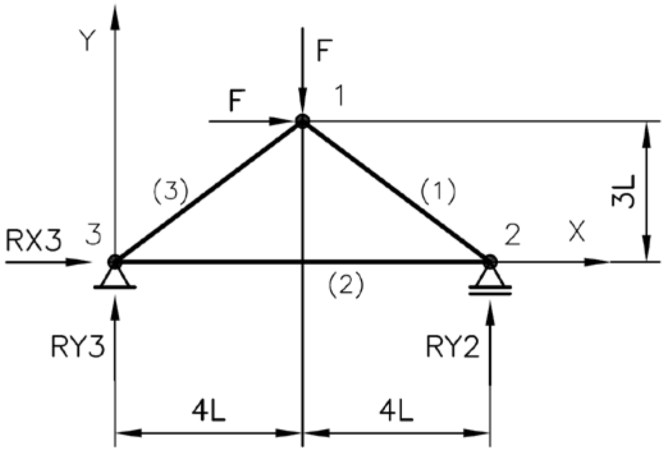
odakle sledi:

$$[m]_{(k)} = \begin{bmatrix} m_{i,i} & m_{i,j} & m_{i,m} \\ m_{j,i} & m_{j,j} & m_{j,m} \\ m_{m,i} & m_{m,j} & m_{m,m} \end{bmatrix} = \frac{m_k}{12} \begin{bmatrix} 2 & 0 & \vdots & 1 & 0 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & 2 & & 0 & 1 & & 0 & 1 \\ \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \\ 1 & 0 & \vdots & 2 & 0 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 2 & & 0 & 1 \\ \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \\ 1 & 0 & \vdots & 1 & 0 & \vdots & 2 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 1 & & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

pri čemu je $m_k = \rho t \Delta$ masa konačnog elementa.

Primer 1

Za potrebe demonstracije primene metode konačnih elemenata u oblasti dinamike elastomehaničkih struktura, vratićemo se na primer koji je korišćen u okviru statike. U pitanju je struktura koja se sastoji iz tri štapa, povezanih kao što je prikazano na slici 7.



Slika 7

Analogno postupku sastavljanja ukupne matrice krutosti, ukupna matrica masa je odredjena sledećom relacijom:

$$[M] = \sum_{(k)} [m]_{(k)}, \qquad (r, s = 1,2,3, \qquad k = 1,2,3)$$

pa sledi:

$$[M] = \sum_{(k)} [M]_{(k)} = \begin{bmatrix} [m_{11}]_{(1)} + [m_{11}]_{(3)} & [m_{12}]_{(1)} & [m_{13}]_{(3)} \\ [m_{21}]_{(1)} & [m_{22}]_{(1)} + [m_{22}]_{(2)} & [m_{23}]_{(2)} \\ [m_{31}]_{(3)} & [m_{32}]_{(2)} & [m_{33}]_{(2)} + [m_{33}]_{(3)} \end{bmatrix}$$

Podmatrice masa moraju da budu izražene u globalnom koordinatnom sistemu. Ta transformacija je definisana sledećom relacijom:

$$\left[m_{r,s}\right]_{(k)} = [T]_{(k)}^T [\widetilde{m}_{rs}]_{(k)} [T]_{(k)}$$

Transformacione matrice imaju istu vrednost kao i za slučaj izvodjenja ukupne matrice krutosti, odnosno:

$$[T]_{(1)} = \frac{1}{5L} \begin{bmatrix} (3L - 0) & -(4L - 8L) \\ (4L - 8L) & (3L - 0) \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}_{(1)}$$

$$[T]_{(2)} = \frac{1}{8L} \begin{bmatrix} (0 - 0) & -(0 - 8L) \\ (0 - 8L) & (0 - 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}_{(2)}$$

$$[T]_{(3)} = \frac{1}{5L} \begin{bmatrix} (0 - 3L) & -(0 - 4L) \\ (0 - 4L) & (0 - 3L) \end{bmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}_{(3)}$$

Dalje, primenom ovih transformacionih matrica, vrši se preslikavanje svih podmatrica masa svih konačnih elemenata iz lokalnog u globalni koordinatni sistem:

$$[m_{11}]_{(1)} = [m_{22}]_{(1)} = [T]_{(k)}^{T}[\widetilde{K}_{rs}][T]_{(k)} =$$

$$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}_{(1)} \frac{m_1}{6}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}_{(1)} = \frac{m_1}{150}\begin{bmatrix} 32 & -24 \\ -24 & 18 \end{bmatrix}$$

$$[m_{12}]_{(1)} = [m_{21}]_{(1)} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}_{(1)} \frac{m_1}{6}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}_{(1)} = \frac{m_1}{150}\begin{bmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{bmatrix}$$

odakle se dalje ispisuje matrica masa konačnog elementa KE(1) u globalnom koordinatnom sistemu:

$$[m]_{(1)} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}_{(1)} = \frac{m_1}{150}\begin{bmatrix} 32 & -32 & \vdots & 16 & -12 \\ -24 & 18 & & -12 & 9 \\ & \cdots & & \cdots & \\ 16 & -12 & \vdots & 32 & -32 \\ -12 & 9 & & -24 & 18 \end{bmatrix}_{(1)}$$

analognim postupkom dalje se izračunavaju podmatrice preostala dva konačna elementa i formiraju njihove podmatrice u globalnom koordinatnom sistemu:

$$[m_{22}]_{(2)} = [m_{33}]_{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{(2)} \frac{m_2}{6}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}_{(2)} = \frac{m_2}{6}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[m_{23}]_{(2)} = [m_{32}]_{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{(2)} \frac{m_2}{6}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}_{(2)} = \frac{m_2}{6}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[m]_{(2)} = \begin{bmatrix} m_{22} & m_{23} \\ m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}_{(2)} = \frac{m_2}{6}\begin{bmatrix} 2 & 0 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \\ & \cdots & & \cdots & \\ 1 & 0 & \vdots & 2 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(2)}$$

$$[m_{11}]_{(3)} = [m_{33}]_{(3)} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}_{(3)} \frac{m_3}{6}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}_{(3)} = \frac{m_3}{6}\begin{bmatrix} 32 & 24 \\ 24 & 18 \end{bmatrix}$$

$$[m_{13}]_{(3)} = [m_{31}]_{(3)} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}_{(3)} \frac{m_3}{6}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}_{(3)} = \frac{m_3}{6}\begin{bmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 9 \end{bmatrix}$$

$$[m]_{(3)} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{13} \\ m_{31} & m_{33} \end{bmatrix}_{(3)} = \frac{m_3}{6}\begin{bmatrix} 32 & 24 & \vdots & 16 & 12 \\ 24 & 18 & & 12 & 9 \\ & \cdots & & \cdots & \\ 16 & 12 & \vdots & 32 & 24 \\ 12 & 9 & & 24 & 18 \end{bmatrix}_{(3)}$$

Pri čemu je $m_1 = 5m$, $m_2 = 8m$ i $m_3 = 5m$, a $m = \rho AL$. Smenom u prethodno definisanu strukturu ukupne matrice masa sledi njen numerički oblik:

$$[M] = \sum_{(k)}[m_{rs}]_{(k)} = \frac{m}{30}\begin{bmatrix} 64 & 0 & 16 & -12 & -16 & 12 \\ 0 & 36 & -12 & 9 & 12 & -9 \\ 16 & -12 & 112 & -24 & 40 & 0 \\ -12 & 9 & -24 & 18 & 0 & 0 \\ -16 & 12 & 40 & 0 & 112 & 24 \\ 12 & -9 & 0 & 0 & 24 & 18 \end{bmatrix}$$

Numeričke vrednosti ukupne matrice masa pokazuju da je ona simetrična, što dalje ukazuje na tačnost sprovedenog postupka računanja. Korespondentni vektor pomeraja glasi:

$$\{\delta\} = \{u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad \vdots \quad 0 \quad 0 \quad 0\}^T$$

Uočava se da 3 od ukupno 6 komponenti vektora pomeraja imaju nenultu vrednost, što omogućava da se dimenzije goreizračunata matrica masa redukuju na 3x3, pa sledi:

$$[Ma] = \frac{m}{30}\begin{bmatrix} 64 & 0 & 16 \\ 0 & 36 & -12 \\ 16 & -12 & 112 \end{bmatrix}$$

Osnovna dinamička jednačina MKE i modalna analiza

Polazimo od prethodno izvedene dinamičke jednačine elastomehaničkog sistema modelovanog pomoću konačnih elemenata:

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [B]\{\dot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = \{F(t)\}$$

odakle se, zanemarivanjem disipativne komponente i komponente spoljašnje dinamičke pobude, dolazi do jednačine slobodnih, neprigušenih oscilacija dinamičkog sistema, odnosno do takozvane osnovne dinamičke jednačine metode konačnih elemenata:

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = \{0\}$$

koja se uvodjenjem dinamičke matrice sistema $[H] = [M]^{-1}[K]$, svodi na sledeći elementarni oblik sistema linearnih diferencijalnih jednačina drugog reda:

$$\{\ddot{\delta}\} + [H]\{\delta\} = \{0\}, \qquad \text{(A)}$$

Obratiti pažnju, matrica $[H]$ u opštem slučaju nije simetrična! Partikularno rešenje ovog sistema glasi:

$$\{\delta\} = \{\delta_0\}e^{i\omega t}$$

Posle dvostrukog diferenciranja i smene u (A), sledi:

$$(-\omega^2[M] + [K])\{\delta_0\} = \{0\} \quad \rightarrow \quad (-\omega^2 I + [H])\{\delta_0\} = \{0\}\,, \qquad \text{(B)}$$

odakle množenjem sa leve strane sa $[H]^{-1}$ i deljenjem sa ω^2 sledi:

$$(-[H]^{-1} + \lambda I)\{\delta_0\} = \{0\}$$

$$\lambda = \frac{1}{\omega^2}$$

Da bi sistem (B) imao realno rešenje, potrebno je da njegova diskriminanta bude veća od nule, odnosno da bude zadovoljeno sledeće:

$$|[H]^{-1} - \lambda I| = 0, \qquad \text{(C)}$$

Jednačinu (C) nazivamo frekventnom jednačinom sistema i ona se, izračunavanjem determinante svodi na polinom *n*-tog reda po promenljivoj λ.

Za dalji rad, potrebno je da se izborom odgovarajućeg koordinantog sistema, polazna jednačina (A) svede na karakteristični oblik u kojem je dinamička matrica sistema dijagonalna, odnosno:

$$\{\ddot{q}\} + [\Lambda]\{q\} = \{0\}, \qquad \text{(D)}$$

$$[\Lambda] = dijag(\lambda_1,\, \lambda_2, \dots,\, \lambda_n)$$

pri čemu je preslikavanje polaznog sistema koordinata $\{\delta\}$ u novouvedeni sistem specijalnih koordinata $\{q\}$ odredjen relacijom:

$$\{\delta\} = [\mu]\{q\}$$

odakle se smenom u (A) dolazi do sledeće relacije koja odredjuje vezu izmedju polazne dinamičke matrice $[H]$ i njoj ekvivalentne dijagonalne matrice $[\Lambda]$:

$$[\mu]^{-1}[H]^{-1}[\mu]\{\ddot{q}\} + \{q\} = \{0\}, \qquad \text{(E)}$$

odnosno:

$$[\Lambda] = [\mu]^{-1}[H]^{-1}[\mu]$$

Sistem koordinata $\{q\}$ nazivamo glavnim koordinatama sistema, a oblici oscilovanja opisani u glavnim kooridnatama nazivaju se glavni oblici oscilovanja. Matricu $[\mu]$ nazivamo modalnom matricom sistema, a promenljivu λ nazivamo sopstvenom vrednošću dinamičke matrice $[H]$.

Primer 1 – nastavak

Smenom podmatrice krutosti $[Ka]$ i podmatrice masa $[Ma]$:

$$[Ka] = \frac{2EA}{125L}\begin{bmatrix} 16 & 0 & -8 \\ 0 & 9 & 6 \\ -8 & 6 & 15.8125 \end{bmatrix}$$

$$[Ma] = \frac{m}{15}\begin{bmatrix} 32 & 0 & 8 \\ 0 & 18 & -6 \\ 8 & -6 & 56 \end{bmatrix}$$

u matričnu jednačinu (B) sistema:

$$\left(-\omega^2 \frac{m}{15}\begin{bmatrix} 32 & 0 & 8 \\ 0 & 18 & -6 \\ 8 & -6 & 56 \end{bmatrix} + \frac{2EA}{125L}\begin{bmatrix} 16 & 0 & -8 \\ 0 & 9 & 6 \\ -8 & 6 & 15.8125 \end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix} u_{01} \\ v_{01} \\ u_{02} \end{Bmatrix} = \{0\}, \qquad \text{(F)}$$

njenim sredjivanjem dolazi se do diskriminante:

$$\begin{vmatrix} 16(1-2p^2) & 0 & -8(1+2p^2) \\ 0 & 9(1-2p^2) & 6(1+2p^2) \\ -8(1+2p^2) & 6(1+2p^2) & 15.8125+56p^2 \end{vmatrix} = 0$$

čijim se izračunavanjem (izračunavanje vrednosti determinante trećeg reda) dobija frekventna jednačina posmatranog sistema, koja je u ovom slučaju polinom trećeg reda:

$$(1-2p^2)(1125 - 14922p^2 + 14976p^4) = 0$$

po uvedenoj pomoćnoj promenljivoj:

$$p^2 = \frac{125mL}{30EA}\omega^2$$

a koja je direktna funkcija kvadrata sopstvene frekvencije ω^2 i mehaničkih i geometrijskih parametara posmatranog sistema (mehaničkih i geometrijskih). Dalje je neophodno izračunati nepoznate vrednosti p^2. Rešavanje ovog polinoma je relativno jednostavno, jer je algebarskim sredjivanjem već delimično faktorizovan, pa možemo prepoznati dva polinomalna množioca nižeg reda koje treba izjednačiti sa nulom, odnosno množilac prvog reda, $(1-2p^2)=0$, odakle se direktno izračunava jedna od tri nepoznate vrednosti, odnosno: $(1-2p^2)=0 \rightarrow p^2 = 0.5$, a zatim i preostale dve rešavajući drugi polinomalni množilac, $(1125 - 14922p^2 + 14976p^4) = 0$, primenom pravila za rešavanje jednačine drugog reda, odnosno: $(1125 - 14922p^2 + 14976p^4) \rightarrow p^2 = (0.0822, 0.9140)$. Sredjivanjem navedenih rešenja po rastućoj vrednosti dobija se konačno rešenje frekventne jednačine posmatranog sistema, odnosno nepoznate sopstvene vrednosti / frekvencije razmatranog sistema:

$$\begin{aligned} {p_1}^2 &= 0.0822 &\rightarrow {\omega_1}^2 &= 0.0197\omega^{*2} & \omega_1 &= 0.140\omega^* \\ {p_2}^2 &= 0.5000 &\rightarrow {\omega_2}^2 &= 0.1200\omega^{*2} & \omega_2 &= 0.340\omega^* \\ {p_3}^2 &= 0.9142 &\rightarrow {\omega_3}^2 &= 0.2190\omega^{*2} & \omega_3 &= 0.468\omega^* \end{aligned}$$

na osnovu čega se dalje može napisati dinamička matrica sistema u koordinatnoj bazi koju čine glavne koordinate razmatranog dinamičkog sistema:

$$[\Lambda] = diag\left\{{}^1\!/_{{\omega_1}^2},\quad {}^1\!/_{{\omega_2}^2},\quad {}^1\!/_{{\omega_3}^2}\right\} = \frac{1}{\omega^{*2}} diag\{50.687,\quad 8.333,\quad 4.558\}$$

pri čemu novouvedena pomoćna konstanta ω^* ima sledeću vrednost:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{EA}{mL}}$$

Pažljivim posmatranjem vrednosti konstante ω^* može se primetiti kako ta konstanta predstavlja dobropoznati izraz $\omega_0 = \sqrt{c/m}$ kojim se definiše sopstvena frekvencija jednomasenog oscilatora, jer je sa c označena krutost aksijalno opterećenog štapa koja je definisana takodje dobropoznatom relacijom $c = EA/L$. Vektor konstanti koje su vidljive u izrazu za dijagonalizovanu dinamičku matricu su samo množioci ovog fundamentalnog fizičkog svojstva svakog elastomehaničkog sistema, kojim se odredjuje svaka od tri sopstvene frekvencije, odnosno njihov relativni odnos.

Poznavanje skupa sopstvenih frekvencija, omogućava dalje izračunavanje njima pripadajućeg skupa sopstvenih vektora dinamičke matrice sistema. Smenom svake od tri izračunate vrednosti sopstvene frekvencije $\omega_i{}^2$ u frekventnu jednačinu (F) sledi:

$$\omega_1 = 0.140\sqrt{\frac{EA}{mL}} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 13.371 & 0 & -8.657 \\ 0 & 7.521 & 6.493 \\ -8.657 & 6.493 & 11.211 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{01} \\ v_{01} \\ u_{02} \end{Bmatrix}_1 = \{0\}$$

$$\omega_2 = 0.340\sqrt{\frac{EA}{mL}} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 9 \\ -12 & 9 & 12.812 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{01} \\ v_{01} \\ u_{02} \end{Bmatrix}_2 = \{0\}$$

$$\omega_3 = 0.468\sqrt{\frac{EA}{mL}} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} -13.225 & 0 & -15.314 \\ 0 & -7.456 & 6.493 \\ -15.314 & 11.485 & -35.384 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{01} \\ v_{01} \\ u_{02} \end{Bmatrix}_3 = \{0\}$$

Njihovim rešavanjem slede vrednosti tri sopstvena vektora (vektori kolone), koji su normirani u odnosu na prvi član:

$$\{\mu\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ {v_{01}}/{u_{01}} \\ {u_{02}}/{u_{01}} \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1.333 \\ 1.544 \end{Bmatrix}$$

$$\{\mu\}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ {v_{01}}/{u_{01}} \\ {u_{02}}/{u_{01}} \end{Bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.333 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{\mu\}_3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ {v_{01}}/{u_{01}} \\ {u_{02}}/{u_{01}} \end{Bmatrix}_3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1.333 \\ -0.865 \end{Bmatrix}$$

Njihovim grupisanjem u jednu matričnu formu dolazi se do takozvane modalne matrice razmatranog dinamičkog sistema:

$$[\mu] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1.333 & 1.333 & -1.333 \\ 1.544 & 0 & -0.865 \end{bmatrix}$$

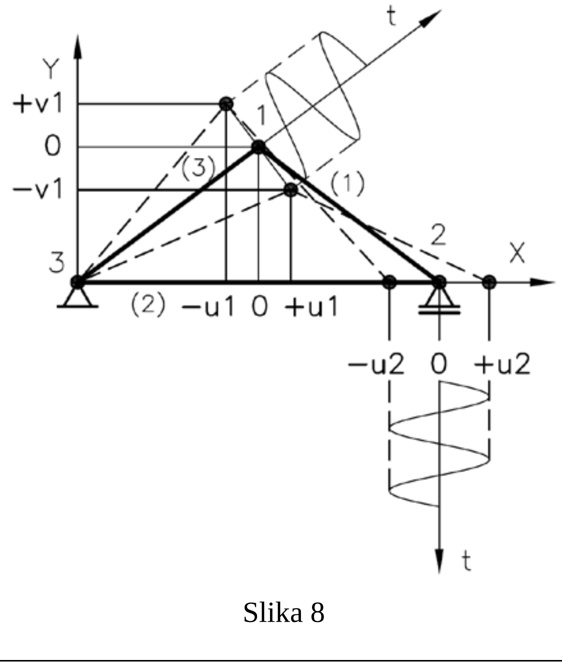
Fizički smisao kolona modalne matrice, odnosno sopstvenih vektora dinamičke matrice $[H]$ je u tome da oni definišu takozvane oblike oscilovanja, odnosno amplitude pomeranja svakog čvora po njegovim stepenima slobode, iskazanim u globalnom koordinatnom sistemu. Dakle, par sopstvena frekvencija i oblik oscilovanja u potpunosti odredjuju dinamičko ponašanje razmatrane diskretizovane elastomehaničke strukture. Ovo se detaljno grafički ilustruje na slici 8, gde se, ucrtavanjem pomeraja za sve čvorove (projekcije ukupne amplitude!) po pojedinim koordinatnim osma, odredjuje rezultantna amplituda, kao i smer oscilovanja na prvoj sopstvenoj frekvenciji ω_1 .

Konkretno, za čvor 1, duž X ose nanose se vrednosti $u_{01} = 1$ u pozitivnom i negativnom smeru. Zatim se to isto radi duž Y ose, nanošenjem vrednosti $v_{01} = -1.3333$ takodje u pozitivnom i negativnom smeru. Treba obratiti pažnju na negativnu vrednost ovog pomeraja. Dalje se za čvor 2 nanosi pomeraj samo duž X ose, ucrtavanjem vrednosti $u_{02} = 1.544$ u pozitivnom i negativnom smeru. Oblici oscilovanja, odnosno krajnji položaji deformisanih konačnih elemenata KE(1) i KE(2) i njima pripadajućim čvorovima 1 i 2 dobijaju se povezivanjem ekstremnih pomeraja isprekidanim linijama, kao što je to prikazano na slici 8. Ovde se uzima u obzir znak pomeraja. Pogledaj sliku 8 pažljivo!

Sinusoide pridružene čvorovima 1 i 2 sa ucrtanom vremenskom osom prikazuje simbolički kako bi svaki od ta dva čvora oscilovali u vremenu, odnosno zamišljenu trajektoriju njihovog kretanja u vremenu. Isprekidane linije pokazuju deformaciju trougaone strukture na prvoj sopstvenoj frekvenciji u ekstremnim položajima, odnosno položajima maksimalne amplitude. Taj oblik nazivamo oblikom oscilovanja na prvoj sopstvenoj frekvenciji. Takodje je bitno da se razume da oblik oscilovanja, odnosno vrednosti amplituda nisu apsolutne.

Vrednosti amplituda datih u modalnoj matrici se mogu množiti bilo kojom konstantom, a uzima se ona vrednost koja omogućava dobru vidljivost (neka vrsta zumiranja, odnosno uvećanja). Bitno je da je konstanta kojom se množe pomeraji pojedinih članova jednaka za sve članove, čime se očuvava relativni odnos pomeraja i time oblik oscilovanja. Takodje, posebno je bitno da se uoči da oba čvora osciluju istom sopstvenom frekvencijom!

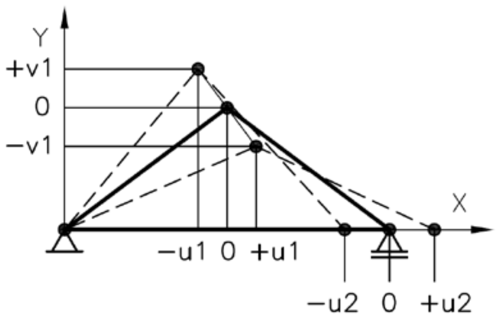
Inače, tokom oscilovanja, štapovi se izdužuju i skraćuju. Dinamika je zato povezana sa njihovom krutošću. Promenom poprečnog preseka utiče se na krutost i time dalje utiče i na ukupna dinamička svojstva razmatrane strukture. Poprečni presek je povezan sa masom, što dalje znači da se dinamička svojstva mogu menjati, i optimizirati, promenom rasporeda mase utrošene za fizičku realizaciju razmatrane elastomehaničke strukture.



Slika 8

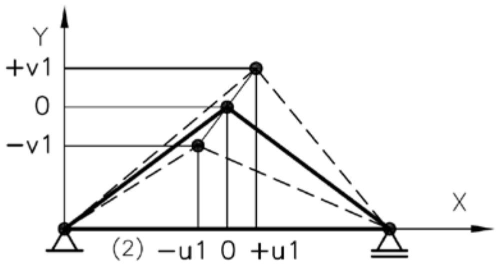
Na slici 9 prikazana su sva tri oblika oscilovanja. Jasno se uočava da se promenom sopstvenih frekvencija menjaju i oblici oscilovanja. Tako, na primer, za drugi oblik oscilovanja karakterističan je nulti pomeraj u čvoru 2 iako on ima slobodu kretanja duž *X* ose. To praktično znači da KE(3) ne učestvuje u procesu oscilovanja, on ima konstantnu vrednost. Ovo je vrlo interesantna pojava koja ukazuje na to da je moguće upravljanje pomerajima na pojedinim tačkama, što dalje može da se vrlo efikasno iskoristi kod optimizacije dinamike noseće strukture obradnog sistema, koja može da se, rasporedom masa, tako podesi da u nekim zonama od interesa amplitude oscilovanja budu jednake nuli ili značajno manje od ostatka strukture. Ipak, optimizacija najviše ima smisla u odnosu na sopstvene frekvencije. Njih treba tako podesiti da budu što je moguće dalje od pobudnih frekvencija dinamičkih sila koje dolaze od procesa rezanja.

Uz prethodno, treba uzeti u obzir da prikazani oblici oscilovanja, koji su potpuno raspregnuti, u ovakvom obliku postoje samo u matematičkoj analizi. U stvarnosti, svi čvorovi osciluju na svim frekvencijama istovremeno. Superpozicijom ovih partikularnih oscilacija dobijaju se vrlo složeni oblici dinamičkog ponašanja. Najveću energiju, pa samim tim i najveće amplitude nose najniže frekvencije. U analizi složenih struktura, koje mogu da imaju više stotina hiljada stepeni slobode, pa samim tim i toliki broj sopstvenih frekvencije, u obzir se uzimaju samo prve tri frekvencije, one sa najnižim vrednostima.



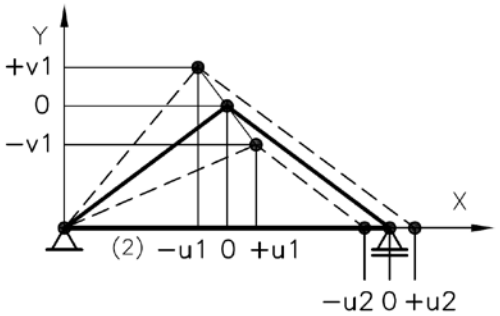
Prvi oblik oscilovanja

$$\omega_1 = 0.140\sqrt{\frac{EA}{mL}}$$



Drugi oblik oscilovanja

$$\omega_2 = 0.340\sqrt{\frac{EA}{mL}}$$



Treći oblik oscilovanja

$$\omega_2 = 0.468\sqrt{\frac{EA}{mL}}$$

Slika 9

Inače, prethodno izvedeni proračun ručnim putem može se vrlo jednostavno sprovesti u Matlab programskom okruženju. Dovoljno je samo par komandi da se ovaj prilično kompleksan zadatak uradi vrlo precizno.

Dinamičku matricu možemo izračunati pomoću samo jedne komande, uz prethodno definisanje matrice krutosti i matrice masa:

```
K = [16 0 -8; 0 9 6; -8 6 15.8125];
M = [32 0 8;0 18 -6;8 -6 56];
H = inv(M)*K

H =

    0.5577   -0.0433   -0.3453
   -0.0769    0.5577    0.4603
   -0.2308    0.1731    0.3810
```

Neposredno iza programskog koda navodi se i izračunata vrednost nepoznate dinamičke matrice. Dakle dinamička matrica razmatranog sistema glasi:

$$[H] = [Ma]^{-1}[Ka] = \frac{6EA}{25mL}\begin{bmatrix} 0.5577 & -0.0433 & -0.3453 \\ -0.0769 & 0.5577 & 0.4603 \\ -0.2308 & 0.1731 & 0.3810 \end{bmatrix}$$

Obratiti pažnju na to da dinamička matrica nije simetrična iako je proizvod dve simetrične matrice (inverzija simetrične matrice uvek kao rezultat daje simetričnu matricu!). Pojava simetrije je specijalni slučaj i javlja se samo kada su množioci komutativni, odnosno kada važi inv(M)*K= K* inv(M).

Dalje se, u MatLab programskim okruženju, nepoznati vektor sopstvenih vrednosti izračunava pomoću komande:

```
[mi, p_2] = eig(H)

mi =

   -0.5325    0.6000    0.4401
    0.7100    0.8000   -0.5868
    0.4609   -0.0000    0.6797

p_2 =

    0.9142         0         0
         0    0.5000         0
         0         0    0.0822
```

Sopstvene vrednosti i, konsekventno tome, sopstveni vektori u ovom slučaju nisu poredjani u rastućem redosledu. Da bi se ovo postiglo, odnosno da bi se izračunate sopstvene vrednosti uredile od najniže ka najvišim, treba dopuniti prethodni kod sa par instrukcija koje u osnovi rade sortiranje sopstvenih vrednosti, memorišu indekse koji odredjuju njihove pozicije i na bazi tih indeksa preuredjuju polaznu modalnu matricu. Konkretno:

```
[mi, p_2] = eig(H, 'vector');
[p_2, ind] = sort(p_2)
mi = mi (:, ind)
```

```
p_2 =

    0.0822
    0.5000
    0.9142
ind =

     3
     2
     1

mi =

    0.4401    0.6000   -0.5325
   -0.5868    0.8000    0.7100
    0.6797   -0.0000    0.4609
```

Dalje, potrebno je normirati modalnu matricu u odnosu na prvi član kolone, što se u Matlabu jednostavno izvodi na sledeći način:

```
vrsta_1 = mi(1,:)
mi_norm = bsxfun(@rdivide, mi, vrsta_1)

vrsta_1 =

    0.4401    0.6000   -0.5325

mi_norm =

    1.0000    1.0000    1.0000
   -1.3333    1.3333   -1.3333
    1.5444   -0.0000   -0.8656
```

Poredjenjem sa ranije izračunatim vrednostima primećujemo da su medjusobno jednake, čime se potvrdjuje tačnost oba postupka.

Sumirajući sve prethodno, sledećim Matlab kodom rešava se kompletna modalna analiza, odnosno dinamika razmatrane strukture koja se sastoji iz 3 konačna elementa u obliku štapa za poznate matrice krutosti i mase:

```
close all, clear, clc
K = [16 0 -8; 0 9 6; -8 6 15.8125]; %matrica krutosti
M = [32 0 8; 0 18 -6; 8 -6 56]; %matrica mase
[mi, p_2] = eig(inv(M)*K, 'vector'); %sopstveni vektori i sopstvene vrednosti
[p_2, ind] = sort(p_2); p_2 %sortiranje sopstvenih vrednosti po rastucem redu
mi = mi (:, ind); %prepakivanje modalne matrice prema rastucem redu sopstvenih vrednosti
mi_norm = bsxfun(@rdivide, mi, mi(1,:)) % normiranje mod. matrice u odnosu na prvi element kolone
```