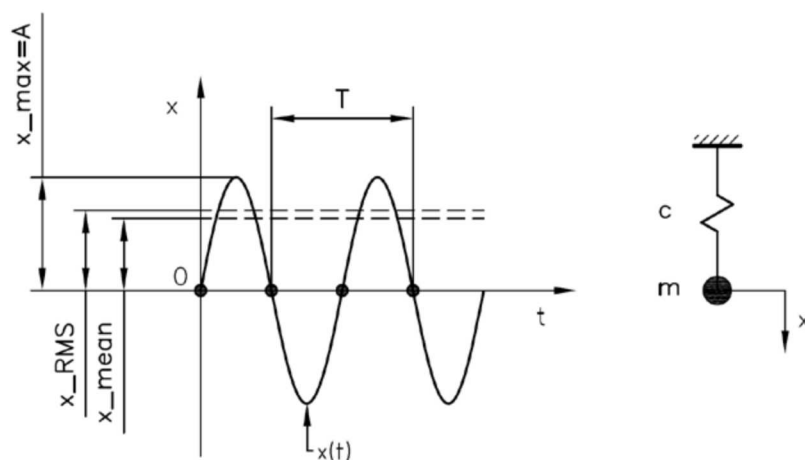


## Dinamika obradnih sistema

Obradni sistem je dinamički sistem. Sile rezanja i drugi izvori promenljivog opterećenja koji se pojavljuju u radu obradnog sistema su dinamičke prirode u svojoj osnovi. Kroz okvir tehnologije mašinogradnje sile rezanja su posmatrane kao statičke veličine. Zanemarivanje njihove dinamičke prirode bilo je namerno, sa ciljem da se ekstremno složeni fenomeni koji prate proces formiranja i odvajanja strugotine pojednostave. Ipak, za potpuno razumevanje procesa rezanja i rada jednog obradnog sistema, dinamička priroda svih fenomena koji prate proces rezanje mora da bude uzeta u obzir. Razlog je vrlo jednostavan. Dinamika uvek podrazumeva pomeraj. U kontekstu obradnih sistema, taj pomeraj ima sasvim očigledne implikacije na tačnost procesa rezanja. Postoje i drugi aspekti, kao što je habanje alata i tome slično, ali tačnost je od primarnog značaja. Istraživanje dinamičkog ponašanja elastomehantičke strukture obradnog sistema pokazaće da ključna veličina u ovom kontekstu, a to je krutost, ima novi značaj i da je moguće opšti pojam krutosti razdvojiti na statičku krutost i dinamičku krutost.

## Osnovni pojmovi, podsećanje

**Jednomaseni oscilator bez prigušenja:** Jednomaseni oscilator bez prigušenja se sastoji iz koncentrisane mase ( $m$ ) vezane za oslonac preko opruge krutosti ( $c$ ). Model je prikazan na slici 1.



Slika 1

Izvodjenjem iz ravnoteže, ovakav sistem počinje da osciluje oko ravnotežnog položaja ( $x = 0$ ) sa periodom  $T$ , frekvencijom  $f = 1/T$  koja se izražava u Hercima (Hz) i amplitudom  $A$ . Perioda  $T$  je vremenski interval između dva identična sukcesivna stanja.

Ovakav oscilatorni sistem nazivamo i harmonijskim oscilatorom. On je linearan i kretanje koncentrisane mase u vremenu, odnosno njen pomeraj u odnosu na ravnotežno stanje opisuje se sledećom trigonometrijskom jednačinom koja je funkcija vremena:

$$x = A \sin\left(2\pi \frac{1}{T} t\right) = A \sin(2\pi f t) = A \sin(\omega t)$$

Diferenciranjem jednačine pomeraja po vremenu dobijaju se jednačine koje definišu brzinu i ubrzanje:

$$\frac{d}{dt}x = \dot{x} = A\omega\cos(\omega t)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}x = \ddot{x} = -A\omega^2\sin(\omega t)$$

U prethodno navedenim jednačinama, frekvencija je izražena u takozvanoj kružnoj frekvenciji, ( $\omega$ ) čija je jedinica ( $rad/s$ ).

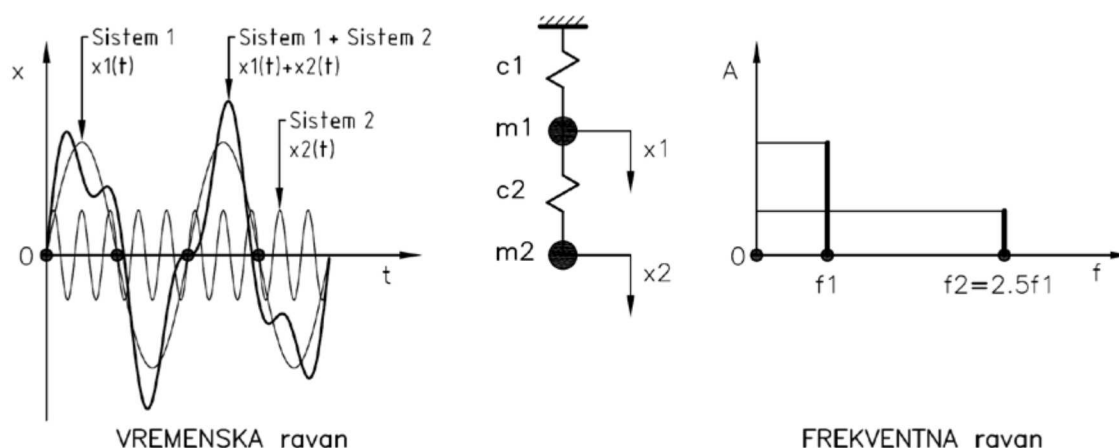
U praksi, pomeraj se meri beskontaktnim senzorom. Brzina takodje. Ubrzanje se meri akcelerometrom. Merenje ubrzanja sa aspekta identifikacije i analize ove vrste pojava kod obradnih sistema ima poseban značaj; Praktično dominantna tehnologija.

Srednja aritmetička vrednost oscilacija, kao i srednja kvadratna vrednost amplitude oscilacija (RMS), definisane su sledećim relacijama:

$$x_{mean} = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)| dt = 0.637A$$

$$x_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x(t)^2 dt} = \frac{\sqrt{2}}{2} A = 0.707A$$

**Višemaseni oscilator bez prigušenja:** Jednomaseni harmonijski oscilator je, sa aspekta prakse, specijalni slučaj. U realnosti oscilacije jednog obradnog sistema su mnogo kompleksnije i aproksimativno se mogu posmatrati kao oscilacije složenog sistema sa velikim brojem međusobno spregnutih jednomasenih oscilatora. Oscilacije tih prostih, jednomasenih oscilatora se superponiraju, što vodi ka novom konceptu, konceptu neharmonijskog oscilatora. Ovaj kontekst se ilustruje primerom oscilatora sa dve mase, kao što je prikazano na slici 2.



Slika 2

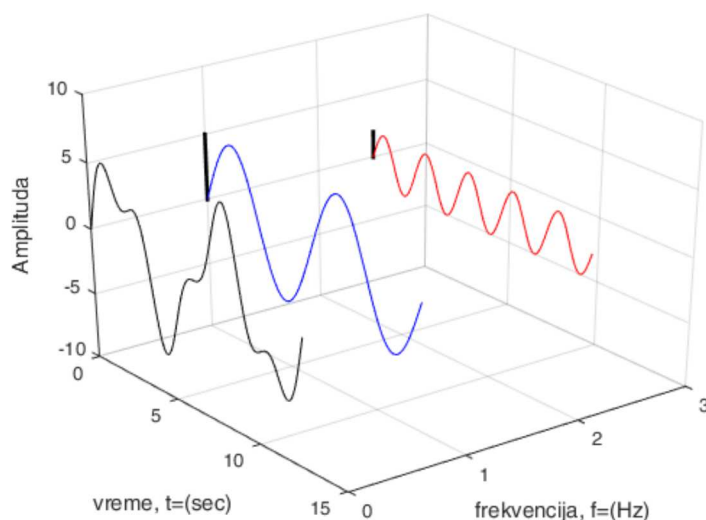
Moguće je uočiti kako se superpozicijom dve harmonijske oscilacije, idealne sinusoide, generiše jedan aperiodični signal, gotovo haotičnog oblika kretanja. Povećanjem broja jednomasenih oscilatora dolazi

se do vrlo složenih oblika oscilovanja. Ipak, superpozicija linearnih sistema uvek vodi ka linearnom determinističkom sistemu, koji može da se precizno modelira i čije je ponašanje prediktivno, bez obzira na to kakvu kompleksnost u dinamičkom ponašanju on ostvaruje.

Dalje, u ovom slučaju vremenski zapis na kojem se prikazuje rezultantni pomeraj posmatrane tačke u vremenu, a koji se prikazuje u takozvanoj vremenskoj ravni, može se prevesti u frekventni domen, u kojem se dinamička svojstva razmatranog sistema posmatraju u frekventnoj ravni, određenom koordinatnim sistemom koji čine frekventna osa i osa na kojoj se prikazuju amplitude oscilovanja na pojedinim frekvencijama. Ovim se oslobadjamo vremena. Prelaz iz vremenskog u frekventni domen omogućava jednostavniju analizu i bolje razumevanje kompozicije dinamičkog sistema, odnosno dinamike neke složene elastomehaničke strukture.

Na slici 3 prikazan je prostorni dijagram koji objedinjuje vremensku i frekventnu ravan. Plavom bojom prikazano je kretanje mase prvog prostog oscilatora, crvenom bojom prikazano je kretanje mase drugog prostog oscilatora, a njihovo superponirano kretanje prikazano je u vremenskoj ravni linijom crne boje. Ortogonalno na vremensku ravan naslonjena je frekventna ravan i ona prikazuje dve frekvencije na kojima osciluju prvi i drugi oscilator, kao i amplitudu tih oscilacija.

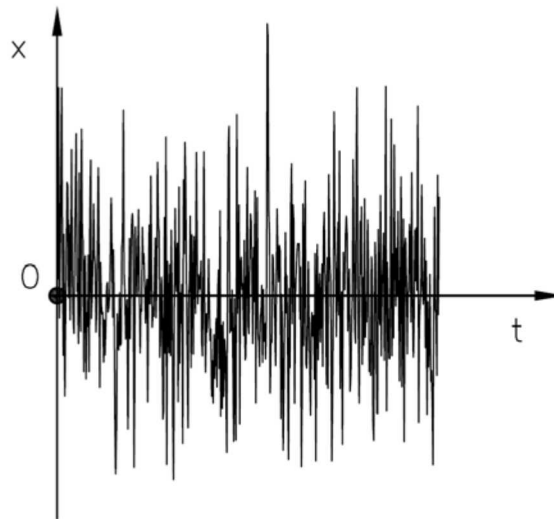
Postoje posebne tehnike koje sadržaj iz vremenske ravni transformišu u korespondentni sadržaj u frekventnoj ravni. To su tehnike Furijeove analize, odnosno dekompozicije proizvoljno složenog vremenskog signala na beskonačnu sumu sinusnih i kosinunskih članova, odnosno beskonačni trigonometrijski red prostih jednomasenh oscilatora, čiji su parametri frekvencije i amplitude takvi da u sumi daju verno replikuju oblik polaznog složenog vremenskog signala. Uzimanjem nekoliko početnih članova dobija se aproksimacija polaznog signala, a broj tih članova određuje njegovu tačnost, odnosno odstupanje od polaznog oblika. Ove sinusne i kosinusne funkcije se nazivaju spektralnim komponentama, a u zbiru nazivaju se spektrom signala.



Slika 3

**Slučajne (stohastičke) oscilacije:** Pored prethodno opisanih neharmonijskih oscilacija složenog elastomehaničkog sistema, postoji i jedna posebna klasa složenih oscilacija koju nazivamo stohastičkim oscilacijama. Te oscilacije generišu složeni sistemi nedeterminističkog tipa, odnosno izvori koji sadrže slučajne i nelinearne procese, koji se ne mogu opisati diferencijalnim jednačinama, već samo mogu da se karakterišu stohastičkim parametrima. Konkretno, stanje sistema u nekom narednom trenutku, bez

obzira na to što poznamo njegovu kompletnu istoriju, ne može se precizno odrediti, već se samo može izraziti verovatnoća njegovog pojavljivanja.



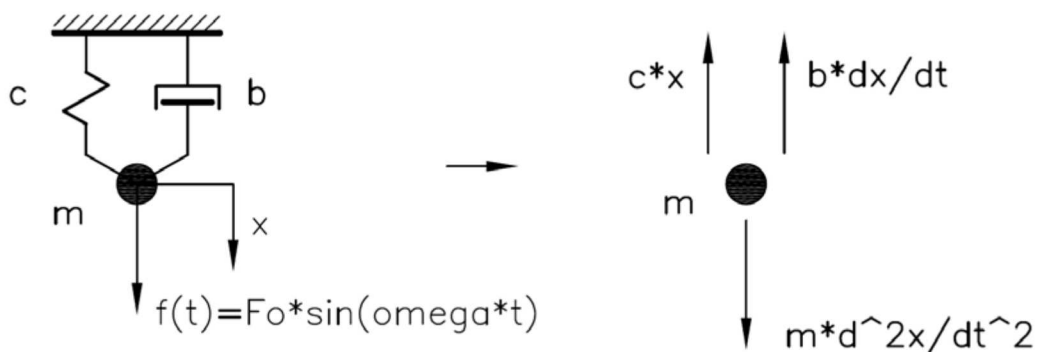
Slika 4

Spektar stohastičkih signala je kontinualan, odnosno beskonačno bogat spektralnim komponentama (takozvanim harmonicima). U zavisnosti od profila spektra razlikujemo različite vrste stohastičkih sistema. Tako na primer, imamo sisteme koji generišu isti intenzitet signala na svim frekvencijama, odnosno imaju uniformni spektar, pa po analogiji sa svetlosti, takav signal nazivamo beli šumom. Ili, postoje signali koji potiču od procesa koje karakterišemo normalnom, odnosno Gausovom raspodelom,  $N = p(\mu, \sigma)$ , koja je određena sa dva parametra, srednjom vrednošću i disperzijom. To su signali koje nazivamo obojeni šum. Signali u obliku belog šuma su specijalni slučaj i teško ih je produkovati. Slučajni signali su po pravilu signali obojenog šuma, odnosno sa neuniformnom spektralnom karakteristikom / profilom.

Realni signali su uvek superpozicija determinističke i slučajne komponente, jer su realni sistemi uvek kombinacija sadržaja koji imaju linearno i nelinearno ponašanje.

### Analitički model jednomasenog oscilatora

Polazimo od opšteg modela jednomasenog oscilatora koji obuhvata inercijalnu komponentu, disipativnu komponentu, elastičnu komponentu i spoljašnju pobudu, što nas vodi ka slučaju oscilatornog prigušenog sistema sa spoljašnjom pobudom (prinudne, prigušene oscilacije). Model je prikazan na slici 5.



Slika 5.

Primenom drugog Njutnovog zakona sledi:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = f(t) - cx - b \frac{dx}{dt}$$

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = f(t) = F_0 \sin(\omega t)$$

pri čemu je sopstvena, odnosno prirodna frekvencija ovog sistema određena sledećom relacijom:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$$

a kritično prigušenje:

$$b_k = 2m \sqrt{\frac{c}{m}} = 2m\omega_0$$

Obratiti pažnju na činjenicu da prigušenje ne utiče na vrednost sopstvene frekvencije. Sopstvena frekvencija je određena samo elastičnim i masenim karakteristikama elastomehaničke strukture. Amplituda oscilacija elastoviskoznog sistem određena je sledećom relacijom:

$$A = \frac{\frac{F_0}{c}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2 \frac{b}{b_k} \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2 \frac{b}{b_k} \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \frac{F_0}{c}$$

pri čemu je  $F_0/c = x_{st}$ . Statički pomeraj  $x_{st}$  određen je amplitudom dinamičke pobudne sile,  $F_0$ .

Fazni pomeraj, odnosno fazni stav oscilacija je definisan sledećom relacijom:

$$\tan \varphi = -\frac{2 \frac{b}{b_k} \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

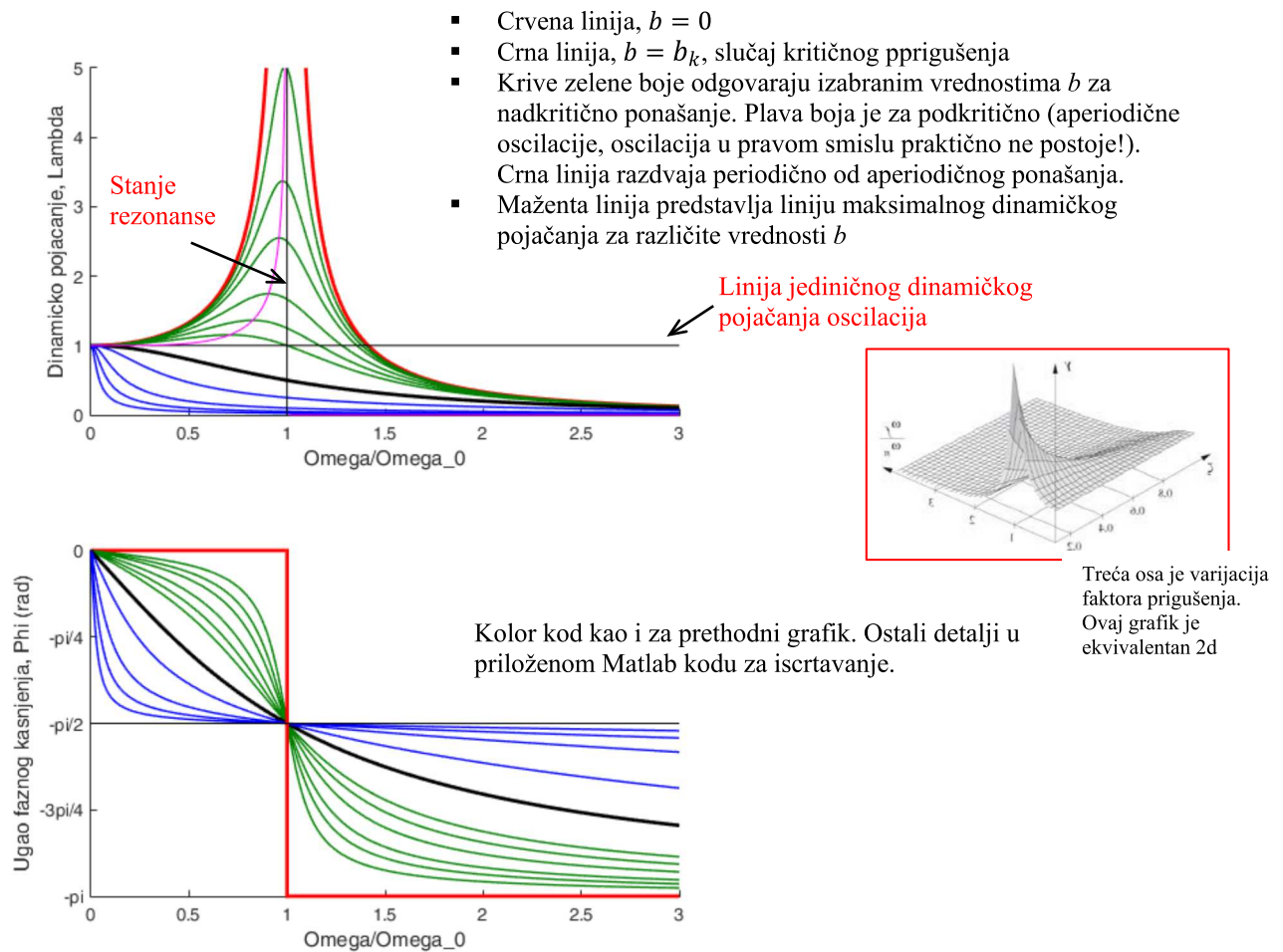
Jednačina kretanja ovog sistema sada glasi:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi)$$

Faktor dinamičkog pojačanja oscilacija, odnosno odnos amplitude dinamičkih oscilacija  $A$  i statičkog pomeraja  $x_{st} = F_0/c$  određen je sledećom relacijom:

$$\lambda = \frac{A}{x_{st}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2 \frac{b}{b_k} \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

Grafički prikaz faktora dinamičkog pojačanja u funkciji relativnog odnosa sopstvene frekvencije i frekvencije spoljašnje pobude naveden je na slici 6. Takođe, na slici 6 je prikazan i njemu pripadajući dijagram ugla faznog kašnjenja.



Slika 6.

Dinamička krutost sistema, koja je određena parametrima dinamičkog sistema i frekvencijom spoljašnje pobude  $\omega$ :

$$c_{din} = \frac{F}{A} = \frac{F}{x_{st}} \frac{1}{\lambda} = f(\omega)$$

Razumevanje fizičkog ponašanja jednomasenog oscilatora prikazanog dijagramima dinamičkog pojačanja amplitude i faznog kašnjenja je od suštinskog značaja. Horizontalna osa na oba dijagrama iskazuje odnos  $\omega/\omega_o$  odnosno odnos sopstvene frekvencije dinamičkog sistema,  $\omega_o$  i frekvencije spoljašnje pobude (frekvencija pobude normirana sopstvenom frekvencijom!),  $\omega$ . Vertikalna osa pokazuje odziv dinamičkog sistema na spoljašnju dinamičku pobudu i to njegovu relativnu amplitudu, odnosno amplituda normirana statičkim pomerajem koji izaziva amplituda spoljašnje pobude  $F_o$ .

Na oba dijagrama treba uočiti na horizontalnoj osi jediničnu vrednost, odnosno vrednost na kojoj je frekvencija spoljašnje pobude jednaka sopstvenoj frekvenciji sistema. Ova karakteristična vrednost odgovara stanju sistema koji nazivamo rezonansom. Dakle, za rezonansu važi da je  $\omega/\omega_o = 1$ . Ta vrednost deli oba dijagrama na levu i desnu polovinu, u kojima prepoznavamo suštinski različito ponašanje elastomehaničkog sistema pod dejstvom spoljašnje dinamičke pobude. Leva strana oba dijagrama prikazuje podkritično ponašanje dinamičkog sistema, dok desna strana prikazuje nadkritično stanje. Prelazna vrednost,  $\omega/\omega_o = 1$  karakteriše se dramatičnom promenom tipa diskontinuiteta i predstavlja jedan od 4 karakteristična stanja oscilatornog sistema posmatrano po horizontalnoj, frekventnoj osi (statičko, podkritično, rezonansa i nadkritično). Za potpuno razumevanje stanja

rezonanse treba uzeti u obzir stepen prigušenja sistema. U slučaju nultog prigušenja dinamičkog sistema, faktor dinamičkog pojačanja oscilacija odlazi u beskonačnost, sistem dobija maksimalnu amplitudu i teorijski, a i praktično, dolazi do njegovog razaranja zbog pozitivne akumulacije mehaničke energije tokom vremena. Paralelno, pripadajući fazni ugao na rezonansi ima diskontinuitet, odnosno odskočno menja vrednost za  $-\pi$  radijana - koncentrisana masa koja je sledila smer pobudne sile u podkritičnom domenu, u nadkritičnom menja smer za  $-\pi$  radijana i suprotstavlja se dejstvu spoljašnje pobude. Upravo ova činjenica, odnosno relativna promena smera kretanja koncentrisane mase u odnosu na smer spoljašnje pobude objašnjava drastični pad dinamičkog pojačanja amplitude u nadkritičnoj zoni, kada faktički dolazi do njenog prigušenja, jer faktor dinamičkog pojačanja postaje manji od jedinice, odnosno važi:  $\lambda < 1$  ukoliko je sistem dovoljno daleko od rezonanse (uvek ako je  $\omega/\omega_o > \sqrt{2}$ ). Treba uočiti da  $\lambda > 1$  predstavlja dinamičko pojačanje oscilacija, dok  $\lambda < 1$  označava dinamičko slabljenje, ili dinamičko prigušenje, kada amplituda oscilovanja postaje manja od korespondentnog statičkog pomeraja  $x_{st}$ . Statička vrednost amplitude je određena sa  $\omega/\omega_o = 0$ , dakle u koordinatnom početku dinamičke ose sistema  $\omega/\omega_o$  sistem se nalazi u stanju mirovanja, odnosno transformiše se u statički sistem (specijalni slučaj na ovom dijagramu!). Lokacija ekstremuma za dinamičko pojačanje može se analitički dobiti diferenciranjem izraza dinamičkog pojačanja po  $\omega/\omega_o$  odakle sledi:

$$\lambda_{max} = \frac{d}{d(\omega/\omega_o)} \lambda = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_o^2})^4}}$$

Vrednost koeficijenta prigušenja takodje ima značajan uticaj na karakter oscilacija. Ukoliko je njegova vrednost manja od kritične, odnosno ako je  $b < b_k$  oscilacije sistema su periodične. U slučaju kada je  $b \geq b_k$  onda oscilacije sistema postaju aperiodične.

Matlab programski kod kojim je iscrtan grafik dinamičkog pojačanja i ugla kašnjenja:

```
% =====
% grafik dinamičkog pojačanja oscilacija i faznog kašnjenja
figure1 = figure(3)
subplot2 = subplot(2,1,2, 'Parent',figure1, 'YTickLabel', {'-pi','-3pi/4','-pi/2','-pi/4','0'},...
    'YTick', [-3.141592 -2.3562 -1.5708 -0.7854 0]);
omega = 0:0.01:5; %vektor omega/omeaga_0
bk=[0, 0.5, 0.1, 0.15 0.2, 0.3, 0.4 0.5 1 2 5 10 20]; % izabrane vrednosti kritičnog prigušenja
for i=1:length(bk)
Lambda(i,:) = 1./sqrt((1-omega.^2).^2 + (2.*bk(i).*omega).^2); %faktor dinamičkog pojačanja
subplot(2,1,1), hold on
    if bk(i)==0
        plot(omega, Lambda(i,:), 'r', 'LineWidth', 2)
    elseif bk(i)==1
        plot(omega, Lambda(i,:), 'k', 'LineWidth', 2)
    else
        if bk(i)>1
            plot(omega, Lambda(i,:), 'b', 'LineWidth', 1)
        else
            plot(omega, Lambda(i,:), 'Color',[0 0.5 0], 'LineWidth', 1)
        end
    end
end
xlabel('Omega/Omega_0','Interpreter', 'none')
ylabel('Dinamičko pojačanje, Lambda')
xlim([0 3]),ylim([0 5]);

Fi(i,:)=atan(-(2.*bk(i).*omega)./(1-omega.^2)); %ugao faznog kašnjenja
for j=1:length(omega) %korekcija znaka atan funkcije
```

```

    if omega(j)>1
        Fi(i,j)=Fi(i,j)-pi;
    end
end
subplot(2,1,2), hold on
if bk(i)==0
    plot(omega, Fi(i,:), 'r', 'LineWidth', 2)
elseif bk(i)==1
    plot(omega, Fi(i,:), 'k', 'LineWidth', 2)
else
    if bk(i)>1
        plot(omega, Fi(i,:), 'b', 'LineWidth', 1)
    else
        plot(omega, Fi(i,:), 'Color',[0 0.5 0], 'LineWidth', 1)
    end
end
end
xlim([0 3]), ylim([-pi 0]);
xlabel('Omega/Omega_0', 'Interpreter', 'none')
ylabel('Ugao faznog kasnjenja, Phi (rad)')
%yticks([0 -pi/2 -pi])
end
subplot(2,1,1) % Dodavanje pomocnih linija
plot([1,1],[0,5], 'k')
plot([0,3],[1,1], 'k')
pik=1./sqrt(1-omega.^4); % kriva maksimuma dinamickog pojacanja
plot(omega, pik, 'm')
hold off
subplot(2,1,2) % dodavanje pomocnih linija
plot([1,1],[0,-pi], 'r', 'LineWidth', 2)
plot([0,3],[-pi/2,-pi/2], 'k')
hold off
set(gcf, 'Position', [500 10 560 750]) % pozicioniranje grafika na ekranu
% =====

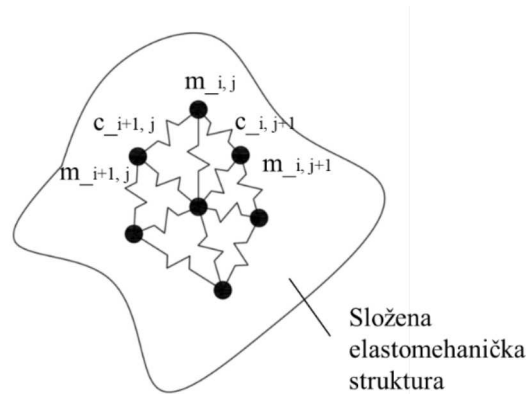
```

Kod projektovanja obradnih sistema, noseću strukturu treba tako oblikovati da se stanje rezonanse eksploatacionom režimu nikada na pojavi. To je praktično nemoguće ostvariti. Moguće je samo to da se najniže sopstvene frekvencije spektra noseće strukture obradnog sistema lociraju što dalje od koordinatnog početka frekvencijske ose. Dalje, noseća struktura treba da ima što je moguće veći koeficijent prigušenja. Time se umanjuju dinamičke oscilacije na višim frekvencijama kada ipak dodje do pojave rezonantnih stanja. Inače, prigušenje ove vrste po pravilu potiče od interkristalnog trenja u materijalu iz kojeg je noseća struktura izradjena. Sivi liv ima značajno veću vrednost interkristalnog trenja u odnosu na čelik. Zbog toga se noseća struktura obradnih sistema izradjuje od sivog liva, uvek kada je to moguće (kada je ekonomski i ekološki opravdano).



## Matrični oblik Lagranžovih jednačina

Svaki kontinualni elastomehanički sistem može se posmatrati kao konačni (ili beskonačni!) skup  $m$  koncentrisanih masa koje su međusobno povezane elastičnim (tačnije, elastodisipativnim) vezama bez masenih svojstava (slika 7).



Slika 7

Za slučaj da je diskretizovani sistem na slici 7 linearan i da poseduje  $n$  stepeni slobode, onda važi sledeće:

$$\text{kinetička energija sistema: } E_k = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n m_{i,j} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

$$\text{potencijalna energija sistema: } E_p = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n c_{i,j} q_i q_j$$

što u matričnom obliku glasi:

$$E_k = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T [M] \{\dot{q}\}$$

$$E_p = \frac{1}{2} \{q\}^T [C] \{q\}$$

gde su:  $\{q\}$  – vektor generalisanih koordinata,  $\{\dot{q}\}$  – vektor generalisanih brzina,  $[M]$  matrica masa i inercijalnih momenata i  $[C]$  matrica krutosti.

Primenom Lagranžovih jednačina drugog reda za slučaj malih oscilacija sistema (primenjuju se trigonometrijske aproksimacije koje analitički model pretvaraju u linearni!):

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} \right\} - \left\{ \frac{\partial E_k}{\partial q_j} \right\} + \left\{ \frac{\partial E_p}{\partial q_j} \right\} = \{Q\}$$

gde se pojedini članovi mogu zapisati kao:

$$\left\{ \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} \right\} = [M] \{\dot{q}\}$$

$$\left\{ \frac{\partial E_p}{\partial q_j} \right\} = [C] \{q\}$$

dolazi se do matičnog oblika sistema linearnih diferencijalnih jednačina drugog reda:

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} = \{Q\} \quad \text{Prinudno oscilovanje sistema bez prigušenja (A)}$$

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} = \{0\} \quad \text{Slobodno oscilovanje sistema bez prigušenja (B)}$$

Uvodjenjem i treće, disipativne komponente:

$$\Phi = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T [B] \{\dot{q}\}$$

gde je sa  $[B]$  označena matrica prigušenja sistema, dolazi se i do trećeg karakterističnog oblika modela dinamičkog ponašanja elastomehaničke strukture:

$$[M]\{\ddot{q}\} + [B]\{\dot{q}\} + [C]\{q\} = \{Q\} \quad \text{Prinudno oscilovanje sistema sa prigušenjem (C)}$$

Analitičko rešavanje dinamičkih jednačina oscilatornog sistema podrazumeva rešavanje dva zadatka:

1. određivanje sopstvenih vrednosti, odnosno sopstvenih frekvencija, i
2. određivanje sopstvenih vektora, odnosno oblika oscilovanja.

Ovim se ulazi u jednu posebnu oblast elastomehanike koju nazivamo modalnom analizom.

Modalna analiza je vrlo bitan alat za kvantitativnu identifikaciju svojstava dinamičkog ponašanja nekog elastomehaničkog sistema, i na bazi toga, njegove optimizacije u procesu inženjerskog projektovanja.

Modalna analiza takodje ima velikog značaja i u eksperimentalnom delu projektnih aktivnosti (postoje tehnike eksperimentalne identifikacije dinamičkih svojstava neke fizičke elastomehaničke strukture) i takodje, u održavanju.

Ukoliko se krene od jednačine dinamičkog sistema u režimu slobodnih oscilacija, jednačina (B), onda se množenjem sa leve strane sa  $[M]^{-1}$  može napisati:

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} = \{0\} \quad / [M]^{-1}$$

$$\{\ddot{q}\} + [M]^{-1}[C]\{\dot{q}\} = \{0\}$$

$$[M]^{-1}[C] = [H]$$

$$\{\ddot{q}\} + [H]\{\dot{q}\} = \{0\}$$

gde je član  $[M]^{-1}[C] = [H]$  predstavlja dinamičku matricu sistema koja u sebi nosi sve informacije o dinamici razmatranog sistema sa aspekta modalne analize.

Dalje se može pretpostaviti da postoji neki koordinatni sistem određen skupom koordinata  $\{p\}$  u kojem važi:

$$\{\ddot{p}\} + [\Lambda]\{\dot{p}\} = \{0\}$$

gde je sa  $[\Lambda]$  označena dijagonalna matrica, odnosno  $[\Lambda] = \text{dijag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ . Veza između dve baze, odnosno dva koordinatna sistema je linearna i definisana je sledećom relacijom:

$$\{q\} = [\mu]\{p\}$$

Matrica  $[\mu]$  u ovom slučaju predstavlja transformacionu matricu kojom se polazni (proizvoljno izabrani) koordinatni sistem preslikava u novouvedeni (sa posebnim svojstvom ortogonalnosti). Smenom ove transformacione relacije u dinamičku jednačinu sistema u režimu slobodnih oscilacija, (B), sledi:

$$[\mu]\{\ddot{p}\} + [H][\mu]\{p\} = \{0\} \quad /[\mu]^{-1}$$

$$\{\ddot{p}\} + [\mu]^{-1}[H][\mu]\{p\} = \{0\}$$

odakle dalje sledi da je nepoznata dijagonalna matrica  $[\Lambda]$  definisana sledećom relacijom:

$$[\Lambda] = [\mu]^{-1}[H][\mu]$$

Ovim transformacijama i prelaskom na dijagonalizovani oblik dinamičke matrice elastomehaničkog sistema, sistem se ortogonalizuje, pa se time vrši njegovo raspredanje i umesto sistema spregnutih linearnih jednačina, dolazi se do mnogo povoljnijeg oblika za dalji rad, do ekvivalentnog sistema diferencijalnih linearnih jednačina drugog reda koje su međusobno nespregnute, odnosno važi:

$$\ddot{p}_r + \lambda_r p_r = 0, \quad r = 1, 2, \dots, n$$

čije je rešenje identično onom koje je već izvedeno u prethodnim razmatranjima:

$$p_r = A_r \sin(\omega_r + \psi_r)$$

i gde sopstvene vrednosti dinamičke matrice  $[\Lambda]$ , odnosno njeni dijagonalni elementi imaju fizički smisao kvadrata sopstvene frekvencije:

$$\omega_r^2 = 1/\lambda_r$$

Koordinate  $\{p\}$  se nazivaju glavnim koordinatama sistema, a korespondentni oblici oscilovanja glavni oblici oscilovanja.

Treba uočiti da se skup generalisanih koordinata proizvoljno bira. Skup glavnih koordinata je, međutim, jedinstven! To je jedini skup koordinata koje su međusobno ortogonalne. Ortogonalnost znači raspregnutost, što ima poseban značaj za modalnu analizu, jer omogućava da se sistemi sa vrlo velikim brojem stepeni slobode matematički dekomponuju na prost skup nespregnutih prostih, jednomasениh oscilatora, čime se dalje omogućava analiza ponašanja sistema za svaku od sopstvenih vrednosti  $\lambda_r$  nezavisno.

### Dinamička jednačina konačnog elementa

Dodavanjem inercijalnih atributa, konačni elementi prethodno razvijeni za potrebe statičke analize, mogu se efikasno primeniti u modeliranju nosećih struktura obradnih sistema.

Specifična inercijalna sila je definisana relacijom:

$$-\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{f\}$$

pri čemu je  $\rho$  gustina, a  $f$  funkcija pomeraja, koja je razmatrana u statici konačnih elemenata.

Analogno, moguće je zapisati i specifičnu silu viskoznog prigušenja, označavajući sa  $\beta$  koeficijent proporcionalnosti:

$$-\beta \frac{\partial}{\partial t} \{f\}$$

Izjednačavajući radove spoljašnjih i unutrašnjih sila, i uzimajući da je  $\{f\}_{(k)} = [N]\{\delta\}_{(k)}$  sledi dinamička jednačina konačnog elementa:

$$[m]_{(k)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{\delta\}_{(k)} + [b]_{(k)} \frac{\partial}{\partial t} \{\delta\}_{(k)} + [k]_{(k)} \{\delta\}_{(k)} = \{F(t)\}_{(k)}$$

gde je:

$$\text{inercijalna matrica} \rightarrow [m]_{(k)} = \int_V [N]^T \rho [N] dV$$

$$\text{matrica prigušenja} \rightarrow [b]_{(k)} = \int_V [N]^T \beta [N] dV$$

Šema sastavljanja za skup međusobno spregnutih konačnih elemenata i formiranje inercijalne matrice sistema - ukupna matrica masa, i disipativne matrice sistema, analogna je šemi sastavljanja ukupne matrice krutosti koja je razmatrana u okviru statike konačnih elemenata, odnosno važi:

$$[M] = \sum_{(k)} [m_{r,s}]_{(k)}$$

$$[B] = \sum_{(k)} [b_{r,s}]_{(k)}$$

što nas vodi do konačnog oblika:

$$[M]\{\delta\} + [B]\{\delta\} + [K]\{\delta\} = \{F(t)\}$$

Sa  $\{\delta\}$  označen je vektor ubrzanja čvornih tačaka,  $\{\dot{\delta}\}$  je vektor brzina čvornih tačaka a  $\{F(t)\}$  je spoljašnja pobuda koja je funkcija vremena (dinamička pobuda, za razliku od pobude u statičkom domenu koja nije vremenska funkcija).

### Matrica mase konačnog elementa

- Konačni elemenat u obliku štapa:

$$[m_{r,s}]_{(k)} = \rho AI \int_L N_r N_s dz, \quad (r, s = i, j)$$

pa integralni član ima vrednost:

$$\int_L N_r N_s dz = \begin{cases} \frac{L^3}{3}, & r = s \\ \frac{L^3}{6}, & r \neq s \end{cases}$$

odakle dalje sledi inercijalna matrica konačnog elementa:

$$[m]_{(k)} = \begin{bmatrix} m_{i,i} & m_{i,j} \\ m_{j,i} & m_{j,j} \end{bmatrix} = \frac{m_k}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & & 0 & 1 \\ \dots & & & \dots & \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

pri čemu je  $m_k = \rho AL$  masa konačnog elementa.

- Konačni elemenat u obliku trougla:

$$[m_{r,s}]_{(k)} = \rho t I \int_{\Delta} N_r N_s dx dy, \quad (r, s = i, j, m)$$

pri čemu je sa  $t$  označena debljina konačnog elementa, a  $\Delta$  je njegova površina. Analogno slučaju štapa, može se napisati:

$$\int_{\Delta} N_r N_s dx dy = \begin{cases} \frac{1}{6} \Delta, & r = s \\ \frac{1}{12} \Delta, & r \neq s \end{cases}$$

odakle sledi:

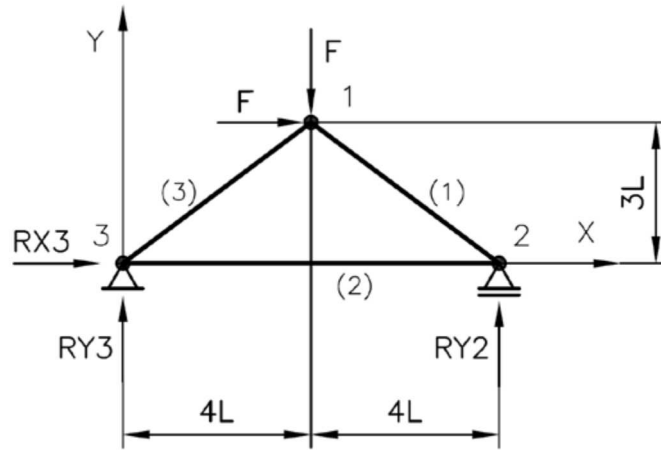
$$[m]_{(k)} = \begin{bmatrix} m_{i,i} & m_{i,j} & m_{i,m} \\ m_{j,i} & m_{j,j} & m_{j,m} \\ m_{m,i} & m_{m,j} & m_{m,m} \end{bmatrix} = \frac{m_k}{12} \begin{bmatrix} 2 & 0 & \vdots & 1 & 0 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & 2 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ \dots & \dots & & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \vdots & 2 & 0 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 2 & \vdots & 0 & 1 \\ \dots & \dots & & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \vdots & 1 & 0 & \vdots & 2 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 1 & & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

pri čemu je  $m_k = \rho t \Delta$  masa konačnog elementa.

**Matrica masa konačnog elementa je uvek simetrična i pozitivno definitna.**

## Primer 1

Za potrebe demonstracije primene metode konačnih elemenata u oblasti dinamike elastomehaničkih struktura, vratićemo se na primer koji je korišćen u okviru statike. U pitanju je struktura koja se sastoji iz tri štapa, povezanih kao što je prikazano na slici 7.



Slika 7

Analogno postupku sastavljanja ukupne matrice krutosti, ukupna matrica masa je određena sledećom relacijom:

$$[M] = \sum_{(k)} [m]_{(k)}, \quad (r, s = 1, 2, 3, \quad k = 1, 2, 3)$$

pa sledi:

$$[M] = \sum_{(k)} [M]_{(k)} = \begin{bmatrix} [m_{11}]_{(1)} + [m_{11}]_{(3)} & [m_{12}]_{(1)} & [m_{13}]_{(3)} \\ [m_{21}]_{(1)} & [m_{22}]_{(1)} + [m_{22}]_{(2)} & [m_{23}]_{(2)} \\ [m_{31}]_{(3)} & [m_{32}]_{(2)} & [m_{33}]_{(2)} + [m_{33}]_{(3)} \end{bmatrix}$$

Podmatrice masa moraju da budu izražene u globalnom koordinatnom sistemu. Ta transformacija je definisana sledećom relacijom:

$$[m_{r,s}]_{(k)} = [T]_{(k)}^T [\tilde{m}_{rs}]_{(k)} [T]_{(k)}$$

Transformacione matrice imaju istu vrednost kao i za slučaj izvodjenja ukupne matrice krutosti, odnosno:

$$[T]_{(1)} = \frac{1}{5L} \begin{bmatrix} (3L - 0) & -(4L - 8L) \\ (4L - 8L) & (3L - 0) \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}_{(1)}$$

$$[T]_{(2)} = \frac{1}{8L} \begin{bmatrix} (0 - 0) & -(0 - 8L) \\ (0 - 8L) & (0 - 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}_{(2)}$$

$$[T]_{(3)} = \frac{1}{5L} \begin{bmatrix} (0 - 3L) & -(0 - 4L) \\ (0 - 4L) & (0 - 3L) \end{bmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}_{(3)}$$

Dalje, primenom ovih transformacionih matrica, vrši se preslikavanje svih podmatrica masa svih konačnih elemenata iz lokalnog u globalni koordinatni sistem:

$$[m_{11}]_{(1)} = [m_{22}]_{(1)} = [T]_{(k)}^T [\tilde{K}_{rs}] [T]_{(k)} =$$

$$= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}_{(1)} \frac{m_1}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}_{(1)} = \frac{m_1}{150} \begin{bmatrix} 32 & -24 \\ -24 & 18 \end{bmatrix}$$

$$[m_{12}]_{(1)} = [m_{21}]_{(1)} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}_{(1)} \frac{m_1}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}_{(1)} = \frac{m_1}{150} \begin{bmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{bmatrix}$$

odakle se dalje ispisuje matrica masa konačnog elementa KE(1) u globalnom koordinatnom sistemu:

$$[m]_{(1)} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}_{(1)} = \frac{m_1}{150} \begin{bmatrix} 32 & -32 & \vdots & 16 & -12 \\ -24 & 18 & \vdots & -12 & 9 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 16 & -12 & \vdots & 32 & -32 \\ -12 & 9 & \vdots & -24 & 18 \end{bmatrix}_{(1)}$$

analognim postupkom dalje se izračunavaju podmatrice preostala dva konačna elementa i formiraju njihove podmatrice u globalnom koordinatnom sistemu:

$$[m_{22}]_{(2)} = [m_{33}]_{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{(2)} \frac{m_2}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}_{(2)} = \frac{m_2}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[m_{23}]_{(2)} = [m_{32}]_{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{(2)} \frac{m_2}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}_{(2)} = \frac{m_2}{6} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[m]_{(2)} = \begin{bmatrix} m_{22} & m_{23} \\ m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}_{(2)} = \frac{m_2}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \vdots & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(2)}$$

$$[m_{11}]_{(3)} = [m_{33}]_{(3)} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}_{(3)} \frac{m_3}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}_{(3)} = \frac{m_3}{6} \begin{bmatrix} 32 & 24 \\ 24 & 18 \end{bmatrix}$$

$$[m_{13}]_{(3)} = [m_{31}]_{(3)} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}_{(3)} \frac{m_3}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}_{(3)} = \frac{m_3}{6} \begin{bmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 9 \end{bmatrix}$$

$$[m]_{(3)} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{13} \\ m_{31} & m_{33} \end{bmatrix}_{(3)} = \frac{m_3}{6} \begin{bmatrix} 32 & 24 & \vdots & 16 & 12 \\ 24 & 18 & \vdots & 12 & 9 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 16 & 12 & \vdots & 32 & 24 \\ 12 & 9 & \vdots & 24 & 18 \end{bmatrix}_{(3)}$$

Pri čemu je  $m_1 = 5m$ ,  $m_2 = 8m$  i  $m_3 = 5m$ , a  $m = \rho AL$ . Smenom u prethodno definisanu strukturu ukupne matrice masa sledi njen numerički oblik:

$$[M] = \sum_{(k)} [m_{rs}]_{(k)} = \frac{m}{30} \begin{bmatrix} 64 & 0 & 16 & -12 & -16 & 12 \\ 0 & 36 & -12 & 9 & 12 & -9 \\ 16 & -12 & 112 & -24 & 40 & 0 \\ -12 & 9 & -24 & 18 & 0 & 0 \\ -16 & 12 & 40 & 0 & 112 & 24 \\ 12 & -9 & 0 & 0 & 24 & 18 \end{bmatrix}$$

Numeričke vrednosti ukupne matrice masa pokazuju da je ona simetrična, što dalje ukazuje na tačnost sprovedenog postupka računanja. Korespondentni vektor pomeraja glasi:

$$\{\delta\} = \{u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad : \quad 0 \quad 0 \quad 0\}^T$$

Uočava se da 3 od ukupno 6 komponenti vektora pomeraja imaju nenultu vrednost, što omogućava da se dimenzije goreizračunata matrica masa redukuju na 3x3, pa sledi:

$$[Ma] = \frac{m}{30} \begin{bmatrix} 64 & 0 & 16 \\ 0 & 36 & -12 \\ 16 & -12 & 112 \end{bmatrix}$$



## Osnovna dinamička jednačina MKE i modalna analiza

Polazimo od prethodno izvedene dinamičke jednačine elastomehantičkog sistema modelovanog pomoću konačnih elemenata:

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [B]\{\dot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = \{F(t)\}$$

odakle se, zanemarivanjem disipativne komponente i komponente spoljašnje dinamičke pobude, dolazi do jednačine slobodnih, neprigušenih oscilacija dinamičkog sistema, odnosno do takozvane osnovne dinamičke jednačine metode konačnih elemenata:

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = \{0\}, \quad (A)$$

koja se uvođenjem dinamičke matrice sistema  $[H] = [M]^{-1}[K]$ , svodi na sledeći elementarni oblik sistema linearnih diferencijalnih jednačina drugog reda:

$$\{\ddot{\delta}\} + [H]\{\delta\} = \{0\}$$

Obratiti pažnju, matrica  $[H]$  u opštem slučaju nije simetrična! Partikularno rešenje ovog sistema glasi:

$$\{\delta\} = \{\delta_0\}e^{i\omega t}$$

Posle dvostrukog diferenciranja i smene u (A), sledi:

$$(-\omega^2[M] + [K])\{\delta_0\} = \{0\} \rightarrow (-\omega^2 I + [H])\{\delta_0\} = \{0\}, \quad (B)$$

odakle množenjem sa leve strane sa  $[H]^{-1}$  i deljenjem sa  $\omega^2$  sledi:

$$(-[H]^{-1} + \lambda I)\{\delta_0\} = \{0\}$$

$$\lambda = \frac{1}{\omega^2}$$

Da bi sistem (B) imao realno rešenje, potrebno je da njegova determinanta bude jednaka nuli, odnosno da bude zadovoljeno sledeće:

$$\det([H]^{-1} - \lambda I) = 0, \quad (C)$$

Jednačinu (C) nazivamo **frekventnom jednačinom dinamičkog sistema** i ona se, izračunavanjem determinante, svodi na polinom  $n$ -tog reda po promenljivoj  $\lambda$ .

Za dalji rad, potrebno je da se izborom odgovarajućeg koordinatnog sistema, polazna jednačina (A) svede na karakteristični oblik u kojem je dinamička matrica sistema dijagonalna, odnosno:

$$[A]\{\ddot{q}\} + \{q\} = \{0\}, \quad (D)$$

$$[A] = \text{dijag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

pri čemu je preslikavanje polaznog sistema koordinata  $\{\delta\}$  u novouvedeni sistem specijalnih koordinata  $\{q\}$  određen relacijom:

$$\{\delta\} = [\mu]\{q\}$$

odakle se smenom u (A) dolazi do sledeće relacije koja određuje vezu između polazne dinamičke matrice  $[H]$  i njoj korespondentne inverzne dinamičke matrice  $[A]$ :

$$[\mu]^{-1}[H]^{-1}[\mu]\{\ddot{q}\} + \{q\} = \{0\}, \quad (E)$$

odnosno:

$$[A] = [\mu]^{-1}[H]^{-1}[\mu]$$

$$[\Omega]^2 = [\mu]^{-1}[H][\mu] = [A]^{-1} = \text{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2)$$

Sistem koordinata  $\{q\}$  nazivamo glavnim koordinatama sistema, a oblici oscilovanja opisani u glavnim koordinatama nazivaju se glavni oblici oscilovanja.

Matricu  $[\mu]$  nazivamo **modalnom matricom sistema**, a promenljivu  $\lambda$  nazivamo **sopstvenom vrednošću dinamičke matrice  $[H]$** .

### Primer 1 – nastavak

Smenom podmatrice krutosti  $[Ka]$  i podmatrice masa  $[Ma]$ :

$$[Ka] = \frac{2EA}{125L} \begin{bmatrix} 16 & 0 & -8 \\ 0 & 9 & 6 \\ -8 & 6 & 15.8125 \end{bmatrix}$$

$$[Ma] = \frac{m}{15} \begin{bmatrix} 32 & 0 & 8 \\ 0 & 18 & -6 \\ 8 & -6 & 56 \end{bmatrix}$$

u matricnu jednačinu (B) sistema:

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = \{0\} \quad (A); \quad (-\omega^2[M] + [K])\{\delta_0\} = \{0\} \quad (B)$$

$$\left( -\omega^2 \frac{m}{15} \begin{bmatrix} 32 & 0 & 8 \\ 0 & 18 & -6 \\ 8 & -6 & 56 \end{bmatrix} + \frac{2EA}{125L} \begin{bmatrix} 16 & 0 & -8 \\ 0 & 9 & 6 \\ -8 & 6 & 15.8125 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} u_{01} \\ v_{01} \\ u_{02} \end{Bmatrix} = \{0\}, \quad (F)$$

njenim sredjivanjem dolazi se do diskriminante:

$$\begin{vmatrix} 16(1-2p^2) & 0 & -8(1+2p^2) \\ 0 & 9(1-2p^2) & 6(1+2p^2) \\ -8(1+2p^2) & 6(1+2p^2) & 15.8125 + 56p^2 \end{vmatrix} = 0$$

čijim se izračunavanjem (izračunavanje vrednosti determinante trećeg reda) dobija **frekventna jednačina** posmatranog sistema, koja je u ovom slučaju polinom trećeg reda:

$$(1-2p^2)(1125-14922p^2+14976p^4) = 0$$

po uvedenoj pomoćnoj promenljivoj:

$$p^2 = \frac{125mL}{30EA} \omega^2$$

a koja je direktna funkcija kvadrata sopstvene frekvencije  $\omega^2$  i mehaničkih i geometrijskih parametara posmatranog sistema (mehaničkih i geometrijskih). Dalje je neophodno izračunati nepoznate vrednosti  $p^2$ . Rešavanje ovog polinoma je relativno jednostavno, jer je algebarskim sredjivanjem već delimično faktorizovan, pa možemo prepoznati dva polinomialna množioca nižeg reda koje treba izjednačiti sa nulom, odnosno množilac prvog reda,  $(1-2p^2) = 0$ , odakle se direktno izračunava jedna od tri nepoznate vrednosti, odnosno:  $(1-2p^2) = 0 \rightarrow p^2 = 0.5$ , a zatim i preostale dve rešavajući drugi polinomialni množilac,  $(1125-14922p^2+14976p^4) = 0$ , primenom pravila za rešavanje jednačine drugog reda, odnosno:  $(1125-14922p^2+14976p^4) \rightarrow p^2 = (0.0822, 0.9140)$ . Sredjivanjem navedenih rešenja po rastućoj vrednosti dobija se konačno rešenje frekventne jednačine posmatranog sistema, odnosno nepoznate sopstvene vrednosti / frekvencije razmatranog sistema:

$$\begin{aligned} p_1^2 = 0.0822 & \rightarrow \omega_1^2 = 0.0197\omega^{*2} & \omega_1 = 0.140\omega^* \\ p_2^2 = 0.5000 & \rightarrow \omega_2^2 = 0.1200\omega^{*2} & \omega_2 = 0.340\omega^* \\ p_3^2 = 0.9142 & \rightarrow \omega_3^2 = 0.2190\omega^{*2} & \omega_3 = 0.468\omega^* \end{aligned}$$

na osnovu čega se dalje može napisati dinamička matrica sistema u koordinatnoj bazi koju čine glavne koordinate razmatranog dinamičkog sistema:

$$[A] = \text{diag} \left\{ \frac{1}{\omega_1^2}, \frac{1}{\omega_2^2}, \frac{1}{\omega_3^2} \right\} = \frac{1}{\omega^{*2}} \text{diag} \{ 50.687, 8.333, 4.558 \}$$

pri čemu novouvedena pomoćna konstanta  $\omega^*$  ima sledeću vrednost:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{EA}{Lm}}$$

Pažljivim posmatranjem vrednosti konstante  $\omega^*$  može se primetiti kako ta konstanta predstavlja dobropoznati izraz  $\omega_0 = \sqrt{c/m}$  kojim se definiše sopstvena frekvencija jednomasenog oscilatora, jer je sa  $c$  označena krutost aksijalno opterećenog štapa koja je definisana takodje dobropoznatom relacijom  $c = EA/L$ . Vektor konstanti koje su vidljive u izrazu za dijagonalizovanu dinamičku matricu su samo množiocci ovog fundamentalnog fizičkog svojstva svakog elastomehaničkog sistema, kojim se određuje svaka od tri sopstvene frekvencije, odnosno njihov relativni odnos.

Poznavanje skupa sopstvenih frekvencija, omogućava dalje izračunavanje njima pripadajućeg skupa sopstvenih vektora dinamičke matrice sistema. Smenom svake od tri izračunate vrednosti sopstvene frekvencije  $\omega_i^2$  u frekventnu jednačinu (F) sledi:

$$\omega_1 = 0.140 \sqrt{\frac{EA}{mL}} \rightarrow \begin{bmatrix} 13.371 & 0 & -8.657 \\ 0 & 7.521 & 6.493 \\ -8.657 & 6.493 & 11.211 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{01} \\ v_{01} \\ u_{02} \end{Bmatrix}_1 = \{0\}$$

$$\omega_2 = 0.340 \sqrt{\frac{EA}{mL}} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 9 \\ -12 & 9 & 12.812 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{01} \\ v_{01} \\ u_{02} \end{Bmatrix}_2 = \{0\}$$

$$\omega_3 = 0.468 \sqrt{\frac{EA}{mL}} \rightarrow \begin{bmatrix} -13.225 & 0 & -15.314 \\ 0 & -7.456 & 6.493 \\ -15.314 & 11.485 & -35.384 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{01} \\ v_{01} \\ u_{02} \end{Bmatrix}_3 = \{0\}$$

Njihovim rešavanjem slede vrednosti tri sopstvena vektora (vektori kolone), koji su normirani u odnosu na prvi član:

$$\{\mu\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ v_{01}/u_{01} \\ u_{02}/u_{01} \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1.333 \\ 1.544 \end{Bmatrix}$$

$$\{\mu\}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ v_{01}/u_{01} \\ u_{02}/u_{01} \end{Bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.333 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{\mu\}_3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ v_{01}/u_{01} \\ u_{02}/u_{01} \end{Bmatrix}_3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1.333 \\ -0.865 \end{Bmatrix}$$

Njihovim grupisanjem u jednu matricnu formu dolazi se do takozvane modalne matrice razmatranog dinamičkog sistema:

$$[\mu] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1.333 & 1.333 & -1.333 \\ 1.544 & 0 & -0.865 \end{bmatrix}$$

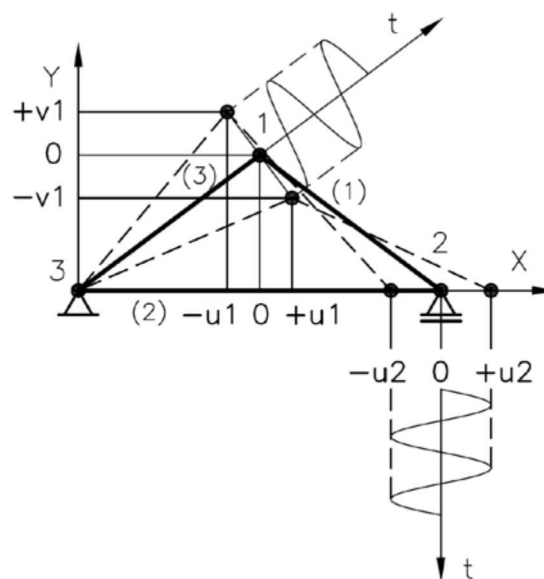
Fizički smisao kolona modalne matrice, odnosno sopstvenih vektora dinamičke matrice  $[H]$  je u tome da oni definišu takozvane oblike oscilovanja, odnosno amplitude pomeranja svakog čvora po njegovim stepenima slobode, iskazanim u globalnom koordinatnom sistemu. Dakle, par sopstvena frekvencija i oblik oscilovanja u potpunosti određuju dinamičko ponašanje razmatrane diskretizovane elastomehničke strukture. Ovo se detaljno grafički ilustruje na slici 8, gde se, ucrtavanjem pomeraja za sve čvorove (projekcije ukupne amplitude!) po pojedinim koordinatnim osma, određuje resultantna amplituda, kao i smer oscilovanja na prvoj sopstvenoj frekvenciji  $\omega_1$ .

Konkretno, za čvor 1, duž  $X$  ose nanose se vrednosti  $u_{01} = 1$  u pozitivnom i negativnom smeru. Zatim se to isto radi duž  $Y$  ose, nanošenjem vrednosti  $v_{01} = -1.3333$  takodje u pozitivnom i negativnom smeru. Treba obratiti pažnju na negativnu vrednost ovog pomeraja. Dalje se za čvor 2 nanosi pomeraj samo duž  $X$  ose, ucrtavanjem vrednosti  $u_{02} = 1.544$  u pozitivnom i negativnom smeru. Oblici oscilovanja, odnosno krajnji položaji deformisanih konačnih elemenata KE(1) i KE(2) i njima pripadajućim čvorovima 1 i 2 dobijaju se povezivanjem ekstremnih pomeraja isprekidanim linijama, kao što je to prikazano na slici 8. Ovdje se uzima u obzir znak pomeraja. Pogledaj sliku 8 pažljivo!

Sinusoide pridružene čvorovima 1 i 2 sa ucrtanom vremenskom osom prikazuje simbolički kako bi svaki od ta dva čvora oscilovali u vremenu, odnosno zamišljenu trajektoriju njihovog kretanja u vremenu. Isprekidane linije pokazuju deformaciju trougaone strukture na prvoj sopstvenoj frekvenciji u ekstremnim položajima, odnosno položajima maksimalne amplitude. Taj oblik nazivamo oblikom oscilovanja na prvoj sopstvenoj frekvenciji. Takodje je bitno da se razume da oblik oscilovanja, odnosno vrednosti amplitude nisu apsolutne.

Vrednosti amplitude datih u modalnoj matrici se mogu množiti bilo kojom konstantom, a uzima se ona vrednost koja omogućava dobru vidljivost (neka vrsta zumiranja, odnosno uvećanja). Bitno je da je konstanta kojom se množe pomeraji pojedinih članova jednaka za sve članove, čime se očuvava relativni odnos pomeraja i time oblik oscilovanja. Takodje, posebno je bitno da se uoči da oba čvora osciluju istom sopstvenom frekvencijom!

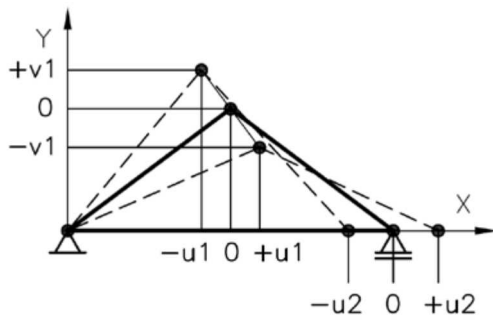
Inače, tokom oscilovanja, štapovi se izdužuju i skraćuju. Dinamika je zato povezana sa njihovom krutošću. Promenom poprečnog preseka utiče se na krutost i time dalje utiče i na ukupna dinamička svojstva razmatrane strukture. Poprečni presek je povezan sa masom, što dalje znači da se dinamička svojstva mogu menjati, i optimizirati, promenom rasporeda mase utrošene za fizičku realizaciju razmatrane elastomehničke strukture.



Slika 8

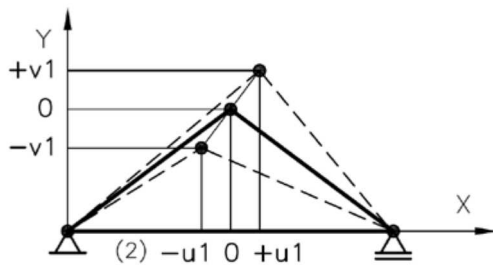
Na slici 9 prikazana su sva tri oblika oscilovanja. Jasno se uočava da se promenom sopstvenih frekvencija menjaju i oblici oscilovanja. Tako, na primer, za drugi oblik oscilovanja karakterističan je nulti pomeraj u čvoru 2 iako on ima slobodu kretanja duž  $X$  ose. To praktično znači da  $KE(3)$  ne učestvuje u procesu oscilovanja, on ima konstantnu vrednost. Ovo je vrlo interesantna pojava koja ukazuje na to da je moguće upravljanje pomerajima na pojedinim tačkama, što dalje može da se vrlo efikasno iskoristi kod optimizacije dinamike noseće strukture obradnog sistema, koja može da se, rasporedom masa, tako podesi da u nekim zonama od interesa amplitude oscilovanja budu jednake nuli ili značajno manje od ostatka strukture. Ipak, optimizacija najviše ima smisla u odnosu na sopstvene frekvencije. Njih treba tako podesiti da budu što je moguće dalje od pobudnih frekvencija dinamičkih sila koje dolaze od procesa rezanja.

Uz prethodno, treba uzeti u obzir da prikazani oblici oscilovanja, koji su potpuno raspregnuti, u ovakvom obliku postoje samo u matematičkoj analizi. U stvarnosti, svi čvorovi osciluju na svim frekvencijama istovremeno. Superpozicijom ovih partikularnih oscilacija dobijaju se vrlo složeni oblici dinamičkog ponašanja. Najveću energiju, pa samim tim i najveće amplitude nose najniže frekvencije. U analizi složenih struktura, koje mogu da imaju više stotina hiljada stepeni slobode, pa samim tim i toliki broj sopstvenih frekvencije, u obzir se uzimaju samo prve tri frekvencije, one sa najnižim vrednostima.



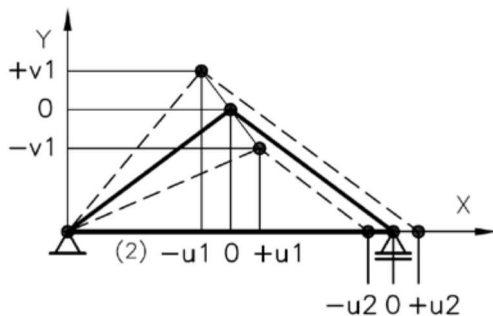
Prvi oblik oscilovanja

$$\omega_1 = 0.140 \sqrt{\frac{EA}{mL}}$$



Drugi oblik oscilovanja

$$\omega_2 = 0.340 \sqrt{\frac{EA}{mL}}$$



Treći oblik oscilovanja

$$\omega_3 = 0.468 \sqrt{\frac{EA}{mL}}$$

Slika 9

Inače, prethodno izvedeni proračun ručnim putem može se vrlo jednostavno sprovesti u Matlab programskom okruženju. Dovoljno je samo par komandi da se ovaj prilično kompleksan zadatak uradi vrlo precizno.

Dinamičku matricu možemo izračunati pomoću samo jedne komande, uz prethodno definisanje matrice krutosti i matrice masa:

```
K = [16 0 -8; 0 9 6; -8 6 15.8125];
M = [32 0 8; 0 18 -6; 8 -6 56];
H = inv(M)*K
```

H =

```
0.5577 -0.0433 -0.3453
-0.0769 0.5577 0.4603
-0.2308 0.1731 0.3810
```

Neposredno iza programskog koda navodi se i izračunata vrednost nepoznate dinamičke matrice. Dakle dinamička matrica razmatranog sistema glasi:

$$[H] = [Ma]^{-1}[Ka] = \frac{6EA}{25mL} \begin{bmatrix} 0.5577 & -0.0433 & -0.3453 \\ -0.0769 & 0.5577 & 0.4603 \\ -0.2308 & 0.1731 & 0.3810 \end{bmatrix}$$

Obratiti pažnju na to da dinamička matrica nije simetrična iako je proizvod dve simetrične matrice (inverzija simetrične matrice uvek kao rezultat daje simetričnu matricu!). Pojava simetrije je specijalni slučaj i javlja se samo kada su množiocu komutativni, odnosno kada važi  $\text{inv}(M)*K = K* \text{inv}(M)$ .

Dalje se, u MatLab programskim okruženju, nepoznati vektor sopstvenih vrednosti izračunava pomoću komande:

```
[mi, p_2] = eig(H)
```

mi =

```
-0.5325 0.6000 0.4401
0.7100 0.8000 -0.5868
0.4609 -0.0000 0.6797
```

p\_2 =

```
0.9142 0 0
0 0.5000 0
0 0 0.0822
```

Sopstvene vrednosti i, konsekventno tome, sopstveni vektori u ovom slučaju nisu poredjani u rastućem redosledu. Da bi se ovo postiglo, odnosno da bi se izračunate sopstvene vrednosti uredile od najniže ka najvišim, treba dopuniti prethodni kod sa par instrukcija koje u osnovi rade sortiranje sopstvenih vrednosti, memorišu indekse koji određuju njihove pozicije i na bazi tih indeksa preuredjuju polaznu modalnu matricu. Konkretno:

```
[mi, p_2] = eig(H, 'vector');
[p_2, ind] = sort(p_2)
mi = mi (:, ind)
p_2 =
```

```

0.0822
0.5000
0.9142
ind =

     3
     2
     1

mi =

    0.4401    0.6000   -0.5325
   -0.5868    0.8000    0.7100
    0.6797   -0.0000    0.4609

```

Dalje, potrebno je normirati modalnu matricu u odnosu na prvi član kolone, što se u Matlabu jednostavno izvodi na sledeći način:

```

vrsta_1 = mi(1,:)
mi_norm = bsxfun(@rdivide, mi, vrsta_1)

vrsta_1 =

    0.4401    0.6000   -0.5325

mi_norm =

    1.0000    1.0000    1.0000
   -1.3333    1.3333   -1.3333
    1.5444   -0.0000   -0.8656

```

Poredjenjem sa ranije izračunatim vrednostima primećujemo da su međusobno jednake, čime se potvrđuje tačnost oba postupka.

Sumirajući sve prethodno, sledećim Matlab kodom rešava se kompletna modalna analiza, odnosno dinamika razmatrane strukture koja se sastoji iz 3 konačna elementa u obliku štapa za poznate matrice krutosti i mase:

```

close all, clear, clc
K = [16 0 -8; 0 9 6; -8 6 15.8125]; %matrica krutosti
M = [32 0 8; 0 18 -6; 8 -6 56]; %matrica mase
[mi, p_2] = eig(inv(M)*K, 'vector'); %sopstveni vektori i sopstvene vrednosti
[p_2, ind] = sort(p_2); p_2 %sortiranje sopstvenih vrednosti po rastucem redu
mi = mi(:, ind); %prepakivanje modalne matrice prema rastucem redu sopstvenih vrednosti
mi_norm = bsxfun(@rdivide, mi, mi(1,:)) % normiranje mod. matrice u odnosu na prvi element kolone

```