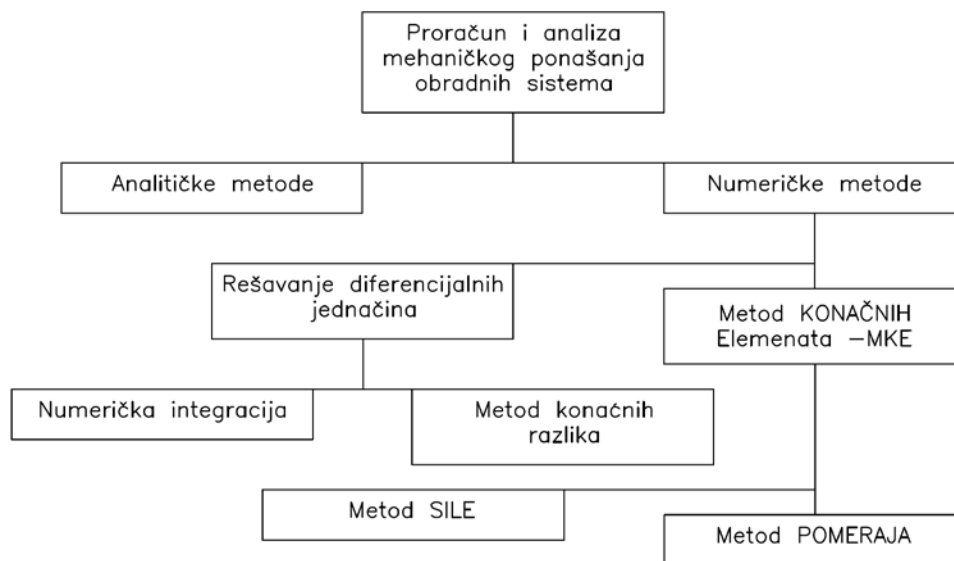


Metod konačnih elemenata

Proračun, analiza i optimizacija nosećih struktura i drugih gradivnih komponenata obradnih sistema zbog geometrijske složenosti ne mogu da se izvedu primenom analitičkih metoda. Umesto toga primenjuju se aproksimativne metode. Pregled ovih metoda dat je na slici 1.

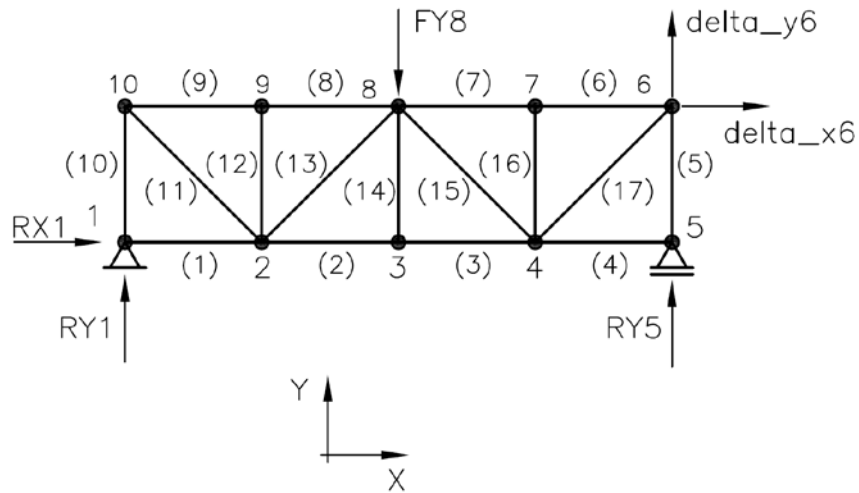


Slika 1

Razvoj digitalnih računara i njihova masovna dostupnost, omogućili su da se aproksimativne metode, u svojim različitim oblicima, efikasno primene kao univerzalni alat za inženjersko projektovanje, najčešće kao dodatak CAD sistemima.

Pojam konačnog elementa

Koncept konačnog elementa može se objasniti na primeru rešetke koja je prikazana na slici 2.



Slika 2

Ova rešetka se sastoji iz 17 štapova, (1) do (17), koji su međusobno povezani u čvorovima, 1 do 10, i tako formiraju jednu mehanički stabilnu noseću strukturu u obliku grede. Ovakvu gredu možemo posmatrati kao skup od 17 diskretnih elemenata u obliku štapa. Štap je geometrijski primitiv čije ponašanje u statičkom domenu ima analitičko rešenje.

Svaki diskretni elemenat, štap u ovom slučaju, nazivamo konačnim elementom.

U čvoru 8 uvedena je spoljašnja sila koja opterećuje rešetku i koja ima samo komponentu u Y pravcu, negativnog smera u odnosu na proizvoljno izabran XoY globalni koordinatni sistem.

Čvorovi rešetke imaju po dva stepena slobode i shodno tome, dva linijska pomeraja (δ_{x6} i δ_{y6} , na primeru čvora 6). Čvoru 1 oduzeta su oba stepena slobode, pa važi $\delta_{x1}=0$ i $\delta_{y1}=0$, a odatle sledi da se u njemu pojavljuje spoljašnja sila u obliku reakcije oslonca sa dve komponente, R_{X1} i R_{Y1} , u opštem slučaju različite od nule. Čvoru 5 je oduzet jedan stepen slobode u pravcu Y ose, dakle tu važi $\delta_{y5}=0$ i odatle sledi da u tom pravcu na njega deluje spoljašnja sila u obliku reakcije oslonca R_{Y5} .

Neprekidnost rešetke podrazumeva da krajevi svih konačnih elemenata (štapova) koji se završavaju u zajedničkom čvoru imaju jednake pomeraje. Takodje, u svakom čvoru postoji ravnoteža unutrašnjih i spoljašnjih sila, pa je rezultatni vektor sile jednak nuli.

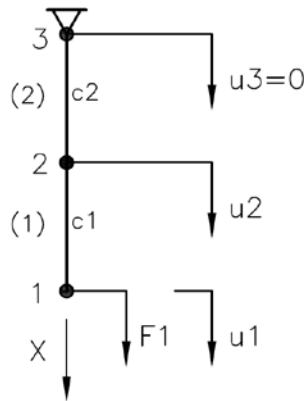
Na sličan način, uvodjenjem konačnih elemenata drugačijeg oblika, mogu se diskretizovati kontinualne ravanske i prostorne strukture, proizvoljnog geometrijskog oblika, složenosti i različitih svojstava materijala od kojih su izradjene.

Matrica krutosti

Rad sa konačnim elementima podrazumeva rad sa matricama kao matematičkim objektima (uredjeno polje brojeva). Sva geometrijska i mehanička svojstva konačnog elementa, bilo kog geometrijskog oblika, izražavaju se preko matrica.

Na primer, krenimo od jednostavnog slučaja mehaničke strukture u obliku štapa, čiji je jedan kraj vezan za oslonac, a drugi slobodan i opterećen spoljašnjom silom (prikazano na slici 3). Za ovakav slučaj postoji analitičko rešenje. Medjutim, na tom primeru ćemo pokazati kako se sprovodi proces diskretizacije i kako se gradi matematički model u matričnom obliku.

Ovu strukturu ćemo posmatrati kao linijsku i podelićemo je na dva konačna elementa.



Slika 3

Sve sile koje deluju na ovu strukturu mogu se iskazati vektorom opterećenja:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

a svi pomeraji čvorova, koji su mogući samo duž X ose, iskazuju se vektorom pomeraja:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

Za prvi konačni element vektori opterećenja i vektori pomeraja glase:

$$\{F\}_{(1)} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}, \{u\}_{(1)} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

Polazeći od osnovne jednačine koja definiše vezu izmedju opterećenja (sile) i pripadajućeg pomeraja:

$$\Delta u c_1 = F_1, \quad u_1 - u_2 = \Delta u$$

kao i da zbog uslova ravnoteže mora da važi $F_2 = -F_1$ mogu se napisati jednačine ravnoteže:

$$(u_1 - u_2)c_1 = F_1$$

$$-(u_1 - u_2)c_1 = F_2$$

koje se dalje mogu preoblikovati u:

$$c_1 u_1 + (-c_1) u_2 = F_1$$

$$(-c_1) u_1 + c_1 u_2 = F_2$$

odakle se odmah može da predje na ekvivalentan zapis u matricnom obliku:

$$\begin{bmatrix} c_1 & -c_1 \\ -c_1 & c_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

a dalje, uvodjenjem matrice krutosti prvog konačnog elementa:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} = [K]_{(1)}$$

dolazi se do konačne matricne relacije u opštem obliku, koja povezuje vektor opterećenja i vektor pomeraja:

$$[K]_{(1)} \{u\}_{(1)} = \{F\}_{(1)}$$

Analogno prethodnom, za ceo sistem od dva konačna elementa važi:

$$(u_1 - u_2) c_1 = F_1$$

$$-(u_1 - u_2) c_1 = F_2$$

$$(u_2 - u_3) c_2 = -F_2$$

$$-(u_2 - u_3) c_2 = F_3$$

Reformulacijom uz sabiranje druge i treće jednačine, dobija se:

$$c_1 u_1 + (-c_1) u_2 + 0 u_3 = F_1$$

$$(-c_1) u_1 + (c_1 + c_2) u_2 + (-c_2) u_3 = 0$$

$$0 u_1 + (-c_1) u_2 + (c_2) u_3 = F_3$$

a odatle sledi matricni oblik ukupnog sistema:

$$[K] \{u\} = \{F\}$$

pri čemu ukupna matrica krutosti glasi:

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ 0 & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_2 & -c_2 \\ 0 & -c_2 & c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & -c_2 \\ 0 & -c_2 & c_2 \end{bmatrix}$$

Konačni elemenat (1) obuhvata čvorove 1 i 2. Konačni elemenat (2) obuhvata čvorove 2 i 3. Očigledno je da je čvor 2 zajednički za oba konačna elementa i da u tom čvoru postoji njihova mehanička interakcija. Zbog toga se, u ukupnoj matrici krutosti, na poziciji čvora 2 superponiraju krutosti koje pripadaju prvom i drugom konačnom elementu. Na ovaj način je ostvarena mehanička interakcija između dva konačna elementa.

Očigledno je da se ukupna matrica krutosti sistema dobija superponiranjem matrica konačnih elemenata koristeći sledeću relaciju:

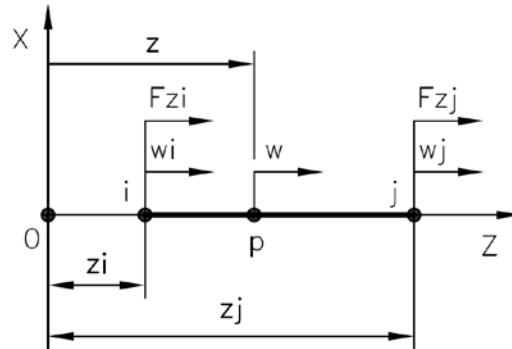
$$[K] = \sum_{(k)} [K_{rs}]_{(k)}$$

Za svaku matricu krutosti važi da je SIMETRIČNA i POZITIVNO DEFINITNA (odnosno da je njena determinanta pozitivna!). Ovo pravilo važi uvek, za svaku matricu krutosti. U radu sa konačnim elementima se koristi kao vrlo jednostavan test za proveru korektnosti i tačnosti sprovedenog postupka izračunavanja.

Konačni element u obliku štapa

Dalje se navodi ravanski analitički model konačnog elementa u obliku štapa. Na slici 4 prikazane su osnovne oznake i lokacija konačnog elementa u lokalnom koordinatnom sistemu $x0z$. Konačni element je određen sa dva čvora, (i, j) , čija je lokacija tako izabrana da leže na z -osi. Shodno tome, čvorovi imaju opterećenje samo duž z -ose, a takodje i pomeraji čvorova su mogući samo duž z -ose. Ovakav specijalni položaj omogućava formulaciju analitičkog modela u najjednostavnijem obliku.

Prvo se izvodi funkcija pomeraja, zatim se izvode analitički izrazi za deformacije, pa napone i na kraju, izvodi se matrica krutosti.



Slika 4

I Funkcija pomeraja

Vektor spoljašnjih opterećenja:

$$\{F\}_{(k)} = \{F_{xi} \quad F_{zi} \quad F_{xj} \quad F_{zj}\}^T = \{0 \quad F_{zi} \quad 0 \quad F_{zj}\}^T$$

Vektor pomeraja čvorova:

$$\{\delta\}_{(k)} = \{u_i \quad w_i \quad u_j \quad w_j\}^T = \{0 \quad u_i \quad 0 \quad w_j\}^T$$

Koordinate čvorova:

$$i: (0, z_i), \quad j: (0, z_j)$$

Pomeraj u bilo kojoj tački p duž štapa definisan je sledećim linearnim modelom:

$$\begin{aligned} u &= 0 \\ w &= a_1 + a_2 z \end{aligned}$$

odnosno, u matičnom obliku:

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix}$$

$$\{f\} = [N]\{a\}, \quad (A)$$

pri čemu je sa f označena vektorska funkcija pomeraja tačke p , a je vektor koeficijenata linearnog modela funkcije pomeraja i N je matrica oblika konačnog elementa. Vektor koeficijenata linearnog modela je nepoznat. On se može odrediti korišćenjem početnih uslova, odnosno korišćenjem koordinati čvornih tačaka konačnog elementa. Korišćenjem relacije (A), za čvorne tačke se može napisati:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ w_i \\ \dots \\ 0 \\ w_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & z_i \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \\ 1 & z_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix}$$

Rešavanjem po nepoznatim koeficijentima sledi:

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = 1/L \begin{bmatrix} 0 & z_j & \vdots & 0 & -z_i \\ 0 & -1 & \vdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ w_i \\ \dots \\ 0 \\ w_j \end{Bmatrix}, \quad (\text{B})$$

gde je $L = z_j - z_i$ dužina konačnog elementa.

Uvodjenjem B u A sledi matrična funkcija pomeraja u razvijenom obliku:

$$\{f\}_{(k)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & N_j & \vdots & 0 & N_i \end{bmatrix} \{\delta\}_{(k)}, \quad (\text{C})$$

gde je: $N_i = -\frac{1}{L}(z_i - z)$; $N_j = \frac{1}{L}(z_j - z)$

Jednačinom C se iskazuje pomeraj bilo koje tačke p konačnog elementa u funkciju pomeraja čvorova i parametara geometrije konačnog elementa (oblik KE).

II Deformacije

Deformacije u bilo kojoj tački štapa sastoje se samo od jedne komponente:

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

Primenom funkcije pomeraja C sledi:

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_j}{\partial z} \end{bmatrix} \vdots \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} \{\delta\}_{(k)} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & -1 \end{bmatrix} \{\delta\}_{(k)}$$

odnosno:

$$\{\varepsilon\} = [B]\{\delta\}_{(k)} = [B_i \quad \vdots \quad B_j]\{\delta\}_{(k)}$$

pri čemu su uvedene podmatrice definisane sa:

$$[B_i] = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, [B_j] = -\frac{1}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

III Naponi

Kada su poznate deformacije, onda se napon izračunava primenom Hukovog zakona. Za slučaj aksijalno opterećenog štapa postoji samo jedna komponenta napona:

$$\sigma_{zz} = E\varepsilon_{zz}$$

Odavde sledi da se napon definiše matričnom jednačinom, pri čemu se Jangov modul elastičnosti smešta u matricu elastičnosti drugog reda, pa se može napisati:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} = E \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \{\varepsilon\}$$

uvodjenjem matrične relacije za deformaciju konačnog elementa u funkciji pomeraja njegovih čvorova, sledi:

$$\{\sigma\} = [D][B_i \quad \dots \quad B_j]\{\delta\}_{(k)}$$

IV Matrica krutosti

U opštem slučaju, matrica krutosti konačnog elementa (k) izvodi se sledećom opštom jednačinom:

$$[K]_{(k)} = \int_L [B]^T [D][B]Adz$$

pri čemu je sa A označena površina poprečnog preseka konačnog elementa.

Ako se matrica krutosti napiše u obliku:

$$[K]_{(k)} = \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix}$$

tada se njene podmatrice drugog reda mogu izračunati na sledeći način:

$$[K_{rs}]_{(k)} = \int_L [B_r]^T [D][B_s]Adz, \quad r = i, j, \quad s = i, j$$

Za slučaj konstantnog poprečnog preseka A , integraljenjem podmatrica drugog reda i njihovom ugradnjom u matricu konačnog elementa, dolazi se do konačnog oblika matrice krutosti sa konstantnim članovima i množiocem kojim se moduliše njihov intenzitet:

$$[K]_{(k)} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & -1 \\ \dots & & & \dots & \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

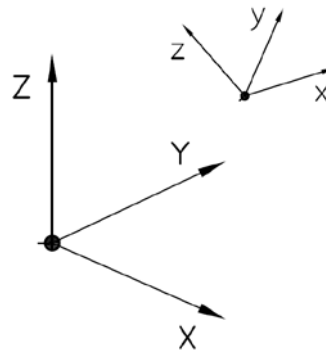
Treba uočiti dve stvari. Prvo, da je matrica simetrična. Drugo, da se ispred matrice nalazi dobro poznati množilac koji smo ranije dobili pri izvodjenju krutosti geometrijskog primitiva u obliku štapa, za slučaj aksijalnog naprezanja, odnosno $k = EA/L$. Ovaj množilac u sebi nosi informaciju o geometriji konačnog elementa (A, L) i materijalu od kojeg je izradjen (E).

Matrica krutosti povezuje domen pomeraja sa domenom spoljašnje pobude. Ona je od fundamentalnog značaja metod konačnih elemenata.

Transformaciona matrica

Konačni elementi se uvek definišu u lokalnom koordinatnom sistemu i pri tome se njihov položaj bira tako da modeli deformacija, napona i krutosti imaju najjednostavniju moguću analitičku formulaciju.

Kod sinteze kompletne mreže neke mehaničke strukture, potrebno je da se analitički model svakog konačnog elementa izrazi u globalnom koordinatnom sistemu, uzimajući njegov stvarni položaju u prostoru. Da bi se to ostvarilo koriste se operator koji vrši preslikavanje modela iz lokalnog u globalni koordinatni sistem. Taj operator ima oblik transformacione matrice. Na slici 6 prikazani su lokalni i globalni koordinatni sistem.



Slika 6

Za slučaj prostornog modela, transformaciona matrica je trećeg reda i određena je kosinusima uglova koji zaklapaju koordinatne ose globalnog i lokalnog koordinatnog sistema:

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos(x, X) & \cos(x, Y) & \cos(x, Z) \\ \cos(y, X) & \cos(y, Y) & \cos(y, Z) \\ \cos(z, X) & \cos(z, Y) & \cos(z, Z) \end{bmatrix}$$

Dalje se prevodjenje matrice krutosti iz lokalnog u globalni koordinatni sistem ostvaruje primenom sledeće kongruentne matricne transformacije:

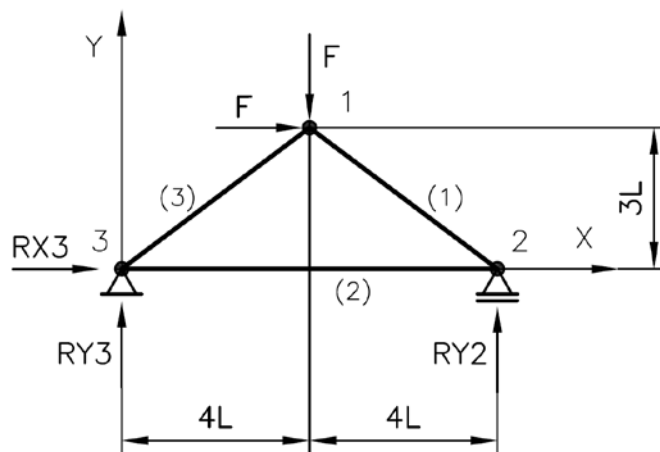
$$[K_{rs}]_{(k)} = [T]_{(k)}^T [\tilde{K}_{rs}] [T]_{(k)}$$

Transformaciona matrica u opštem slučaju nije simetrična.

Kongruentna transformacija matrice krutosti iskazane u lokalnom koordinatnom sistemu uvek generiše matricu u globalnom koordinatnom sistemu koja je simetrična i pozitivno definitna.

Primer 1

Ravanska mehanička struktura koja se ovde analizira sastoji se iz tri čvora i tri konačna elementa u obliku štapa. Površina poprečnog preseka svih konačnih elemenata ima vrednost A . Topologija ove strukture prikazana je na slici 7 zajedno sa osnovnim merama. Sa slike se jasno uočava da je konačni element KE(1) određen je čvorovima 1 i 2. Konačni element KE(2) je određen čvorovima 2 i 3, dok je konačni element KE(3) određen čvorovima 1 i 3. Konačni element KE(1) je u čvoru 1 povezan sa konačnim elementom KE(3), a u čvoru 2 sa konačnim elementom KE(2). Uz to, konačni elementi KE(2) i KE(3) su međusobno povezani u čvoru 3. Dakle, ova ravanska struktura se odlikuje vrlo složenim vezama njenih sastavnih elemenata, kroz koje se prenose spoljašnja opterećenja.



Slika 7

Nepokretni oslonac se nalazi u čvoru 3 i u njemu deluju tri spoljašnje sile u obliku reakcije oslonca. U čvoru 1 deluje spoljašnja sila koja ima dve komponente u pravcu X i Y ose intenziteta F . U čvoru 2 se nalazi pokretni oslonac i u njemu deluje jedna spoljašnja sila, reakciju u pravcu Y ose. Ova noseća struktura je statički određena.

Ukupna matrica krutosti (matrica krutosti kompletne mehaničke strukture prikazane na slici 7) predstavlja superpoziciju matrica krutosti pojedinih konačnih elemenata i definisana je sledećom opštom relacijom:

$$[K] = \sum_{(k)} [K_{rs}]_{(k)}, \quad (r, s = 1, 2, 3, \quad k = 1, 2, 3)$$

pri čemu su matrice krutosti pojedinih konačnih elemenata određene njihovim čvorovima, pa za konačni element (1) koji je određen čvorovima 1 i 2 sledi:

$$[K]_{(1)} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}_{(1)}$$

analogno tome, za preostala dva konačna elementa može se napisati:

$$[K]_{(2)} = \begin{bmatrix} K_{22} & K_{23} \\ K_{32} & K_{33} \end{bmatrix}_{(2)}, \quad [K]_{(3)} = \begin{bmatrix} K_{33} & K_{31} \\ K_{13} & K_{11} \end{bmatrix}_{(3)}$$

Naglašava se da u indeksi članova ovih matrica nemaju smisao uobičajenog matematičkog indeksiranja članova matrice, već su oni brojevi čvorova koji definišu svaki od konačnih elemenata!

Primenjujući prethodno navedenu relaciju za formiranje ukupne matrice krutosti sledi:

$$[K] = \sum_{(k)} [K_{rs}]_{(k)} = \begin{bmatrix} [K_{11}]_{(1)} + [K_{11}]_{(3)} & [K_{12}]_{(1)} & [K_{13}]_{(3)} \\ [K_{21}]_{(1)} & [K_{22}]_{(1)} + [K_{22}]_{(2)} & [K_{23}]_{(2)} \\ [K_{31}]_{(3)} & [K_{32}]_{(2)} & [K_{33}]_{(2)} + [K_{33}]_{(3)} \end{bmatrix}$$

Treba uočiti da se u ukupnoj matrici, u svakom čvoru u kojem se susište dva konačna elementa vrši sabiranje njihovih podmatrica krutosti. Na ovaj način formira se jedan matematički spregnut model koji izražava ukupna elastična svojstva posmatrane ravanske elastomehaničke strukture. Za razliku od statike koja operiše samo u domenu sile, preko matrice krutosti sprežu se domen sile i domen pomeraja, odnosno vrši se preslikavanje sele u pomeraj.

Dalje u ukupnu matricu krutosti treba uneti elemente njenih podmatrica K_{rs} koristeći prethodno izvedenu osnovu relaciju koja definiše matricu krutosti konačnog elementa u obliku štapa:

$$[K]_{(k)} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & -1 \\ \dots & & & \dots & \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

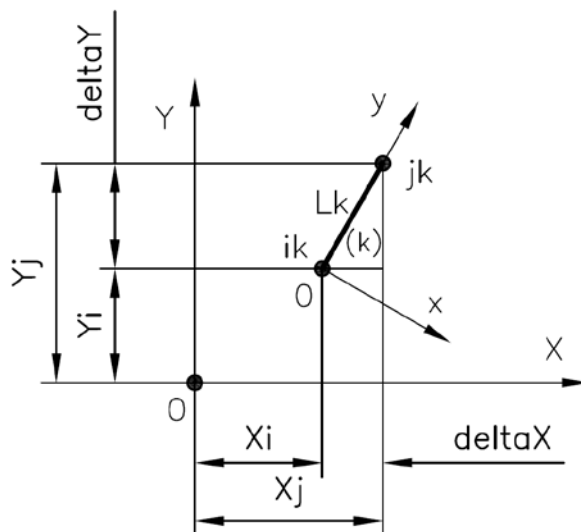
i transformacionu matricu, koja tu jednačinu transformiše tako da odgovara orijentaciji konkretnog konačnog elementa definisanoj postavkom zadatka.

Transformaciona matrica za ravanski slučaj svodi se na dvodimenzionu matricu koja se izračunava prema sledećoj relaciji, čiji je fizički smisao prikazan na slici 8:

$$[T]_{(k)} = \frac{1}{L_k} \begin{bmatrix} (Y_j - Y_i) & -(X_j - X_i) \\ (X_j - X_i) & (Y_j - Y_i) \end{bmatrix}$$

pri čemu je sa L_k označena dužina konačnog elementa koja se, prema slici 8, izračunava pomoću sledeće relacije, koristeći koordinate čvorova koji određuju konačni element:

$$L_k = [(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2]^{1/2}$$



Slika 8

Koordinate čvorova direktno se očitavaju sa slike 7:

$$(X_1, Y_1) = (4L, 3L), \quad (X_2, Y_2) = (8L, 0), \quad (X_3, Y_3) = (0, 0)$$

a odatle se dalje izračunavaju dužine konačnih elemenata:

$$L_1 = 5L, \quad L_2 = 8L, \quad L_3 = 5L$$

Na osnovu prethodnog, primenjujući prethodno navedene formule i izračunate dužine $L_{(k)}$ izračunavaju se transformacione matrice za svaki od tri konačna elementa:

$$[T]_{(1)} = \frac{1}{5L} \begin{bmatrix} (3L - 0) & -(4L - 8L) \\ (4L - 8L) & (3L - 0) \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}_{(1)}$$

$$[T]_{(2)} = \frac{1}{8L} \begin{bmatrix} (0 - 0) & -(0 - 8L) \\ (0 - 8L) & (0 - 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}_{(2)}$$

$$[T]_{(3)} = \frac{1}{5L} \begin{bmatrix} (0 - 3L) & -(0 - 4L) \\ (0 - 4L) & (0 - 3L) \end{bmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}_{(3)}$$

Dalje, primenom ovih transformacionih matrica, vrši se preslikavanje svih podmatrica svih konačnih elemenata iz lokalnog u globalni koordinatni sistem:

$$\begin{aligned} [K_{11}]_{(1)} &= [K_{22}]_{(1)} = [T]_{(k)}^T [\tilde{K}_{rs}] [T]_{(k)} = \\ &= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}_{(1)} \frac{EA}{5L} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}_{(1)} = \frac{EA}{125L} \begin{bmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$[K_{12}]_{(1)} = [K_{21}]_{(1)} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}_{(1)} \frac{EA}{5L} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}_{(1)} = \frac{EA}{125L} \begin{bmatrix} -16 & 12 \\ 12 & -9 \end{bmatrix}$$

odakle se dalje ispisuje matrica krutosti konačnog elementa KE(1) u globalnom koordinatnom sistemu:

$$[K]_{(1)} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}_{(1)} = \frac{EA}{125L} \begin{bmatrix} 16 & -12 & \vdots & -16 & 12 \\ -12 & 9 & & 12 & -9 \\ \cdots & & & & \cdots \\ -16 & 12 & \vdots & 16 & -12 \\ 12 & -9 & & -12 & 9 \end{bmatrix}_{(1)}$$

analognim postupkom dalje se izračunavaju podmatrice preostala dva konačna elementa i formiraju njihove podmatrice u globalnom koordinatnom sistemu:

$$[K_{22}]_{(2)} = [K_{33}]_{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{(2)} \frac{EA}{8L} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}_{(2)} = \frac{EA}{8L} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K_{23}]_{(2)} = [K_{32}]_{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{(2)} \frac{EA}{8L} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}_{(2)} = \frac{EA}{8L} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K]_{(2)} = \begin{bmatrix} K_{22} & K_{23} \\ K_{32} & K_{33} \end{bmatrix}_{(2)} = \frac{EA}{8L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \\ \cdots & & & & \cdots \\ -1 & 0 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(2)}$$

$$[K_{11}]_{(3)} = [K_{33}]_{(3)} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}_{(3)} \frac{EA}{5L} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}_{(3)} = \frac{EA}{125L} \begin{bmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 9 \end{bmatrix}$$

$$[K_{13}]_{(3)} = [K_{31}]_{(3)} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}_{(3)} \frac{EA}{5L} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}_{(3)} = \frac{EA}{125L} \begin{bmatrix} -16 & -12 \\ -12 & -9 \end{bmatrix}$$

$$[K]_{(3)} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{13} \\ K_{31} & K_{33} \end{bmatrix}_{(3)} = \frac{EA}{125L} \begin{bmatrix} 16 & 12 & \vdots & -16 & -12 \\ 12 & 9 & \vdots & -12 & -9 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -16 & -12 & \vdots & 16 & 12 \\ -12 & -9 & \vdots & 12 & 9 \end{bmatrix}_{(3)}$$

Smenom u prethodno definisanu strukturu ukupne matrice krutosti sledi njen numerički oblik:

$$[K] = \sum_{(k)} [K_{rs}]_{(k)} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} +0.256 & +0.000 & -0.128 & +0.096 & -0.128 & -0.096 \\ +0.000 & +0.144 & +0.096 & -0.072 & -0.096 & -0.072 \\ -0.128 & +0.096 & +0.253 & -0.096 & -0.125 & +0.000 \\ +0.096 & -0.128 & -0.096 & +0.072 & +0.000 & +0.000 \\ -0.072 & -0.096 & -0.072 & +0.000 & +0.253 & +0.096 \\ -0.096 & -0.125 & +0.000 & +0.000 & +0.096 & +0.072 \end{bmatrix}$$

Numeričke vrednosti ukupne matrice krutosti pokazuju da je ona simetrična, što dalje ukazuje na tačnost sprovedenog postupka računanja. Korespondentni vektor opterećenja i vektor pomeraja glase:

$$\{F\} = \{F \quad -F \quad 0 \quad \vdots \quad RY_2 \quad RX_3 \quad RY_3\}^T$$

$$\{\delta\} = \{u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad \vdots \quad 0 \quad 0 \quad 0\}^T$$

odatle dalje sledi osnovna elastostatička jednačina ponašanja posmatrane ravanske strukture:

$$[K]\{\delta\} = \{F\}$$

Ova jednačina povezuje domen pomeraja i domen opterećenja, odnosno daje odgovor na dva ključna pitanja: a)koliki su pomeraji koje izaziva spoljašnja sila i b)kolike su reakcije oslonaca? Ukoliko se pažljivo pogledaju vektori opterećenja i vektori pomeraja, uočiće se da se oni sastoje iz elemenata koji su poznati i elemenata koji nisu poznati. Odredjivanje nepoznatih elemenat u oba vektora, odnosno nepoznatih reakcija oslonaca u vektoru opterećenja i nepoznatih pomeraja po neograničenim stepenima slobode u vektoru pomeraja, zahteva primenu postupka koji podrazumeva dekompoziciju ukupne matrice krutosti. Sa ovim u vezi, moguće je prethodnu matričnu jednačinu dekomponovati na dve matrične jednačine nižeg reda, koristeći pogodno grupisanje poznatih i nepoznatih elemenata vektora pomeraja i vektora opterećenja:

$$\begin{bmatrix} Ka & \vdots & Kb \\ \dots & \dots & \dots \\ Kc & \vdots & Kd \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ -F \\ 0 \\ \dots \\ RY_2 \\ RX_3 \\ RY_3 \end{pmatrix}$$

pri čemu uvedene podmatrice trećeg reda glase:

$$[Ka] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} +0.256 & +0.000 & +0.128 \\ +0.000 & +0.144 & +0.096 \\ +0.128 & +0.096 & +0.253 \end{bmatrix}, [Kb] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} +0.096 & -0.128 & -0.096 \\ -0.072 & -0.096 & +0.072 \\ -0.125 & -0.125 & +0.000 \end{bmatrix}$$

Na osnovu prethodnog, mogu se napisati dve matrične jednačine. Prva matrična jednačina omogućava izračunavanje nepoznatih pomeraja čvorova u funkciji spoljašnjeg opterećenja:

$$[Ka] \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ -F \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \{\delta\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = [Ka]^{-1} \begin{Bmatrix} F \\ -F \\ 0 \end{Bmatrix}$$

odakle sledi:

$$u_1 = u_1(F)$$

$$v_1 = v_1(F)$$

$$u_2 = u_2(F)$$

Druga matrična jednačina glasi:

$$[Kc] \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} RY_2 \\ RX_3 \\ RY_3 \end{Bmatrix} \rightarrow \{R\} = \begin{Bmatrix} RY_2 \\ RX_3 \\ RY_3 \end{Bmatrix} = [Kc] \begin{Bmatrix} u_1(F) \\ v_1(F) \\ u_2(F) \end{Bmatrix}$$

Očigledno je da ona, uvodjenjem prethodno izračunatih nepoznatih pomeraja, omogućava izračunavanje nepoznatih reakcija oslonaca (reakcije oslonaca ovde možemo da definišemo kao spoljašnje sile koje proizvode poznate pomeraje nulte vrednosti):

$$RY_2 = RY_2(u_1, v_1, u_2)$$

$$RX_3 = RX_3(u_1, v_1, u_2)$$

$$RY_3 = RY_3(u_1, v_1, u_2)$$

Primenjujući izračunate vrednosti ukupne matrice krutosti, slede vrednosti nepoznatih pomeraja i nepoznatih reakcija oslonaca:

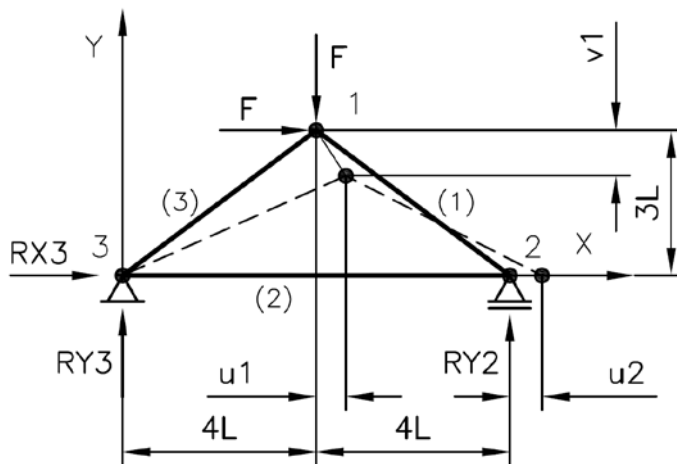
$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = [Ka]^{-1} \begin{Bmatrix} F \\ -F \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{L}{EA} \begin{bmatrix} 5.9063 & -2.6667 & 4.0000 \\ -2.6667 & 10.5000 & -5.3333 \\ 4.0000 & -5.3333 & 8.0000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F \\ -F \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{FL}{EA} \begin{Bmatrix} +8.5729 \\ -13.1667 \\ +9.3333 \end{Bmatrix}$$

$$\{R\} = \begin{Bmatrix} RY_2 \\ RX_3 \\ RY_3 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} +0.096 & -0.128 & -0.096 \\ -0.072 & -0.096 & +0.072 \\ -0.125 & -0.125 & +0.000 \end{bmatrix} \frac{FL}{EA} \begin{Bmatrix} +8.5729 \\ -13.1667 \\ +9.3333 \end{Bmatrix} = F \begin{Bmatrix} +0.8750 \\ -1.0000 \\ +0.1250 \end{Bmatrix}$$

U slučaju da poznate i nepoznate promenljive nisu grupisane na način kao što je to slučaj u ovom primeru, vrši se njihovo pregrupisanje tako da se one razdvoje i time omogući sprovođenje prethodno navedenog postupka izračunavanja nepoznatih pomeraja i nepoznatih reakcija oslonaca. Manipulacije ove vrste se sprovode sa pravilima matričnog računa.

Fizički smisao izračunatog vektora pomeraja i reakcija oslonaca prikazan je na slici 9. Uočava se kako se, zbog aksijalne deformacije konačnih elemenata KE(1), KE(2) i KE(3) pod dejstvom spoljašnje sile u čvoru 1, čvor 1 pomera u pravcu X i Y ose za u_1 i v_1 respektivno. Takođe, zbog aksijalne deformacije konačnih elemenata KE(1), KE(2) i KE(3) pojavljuje se pomeraj i u čvoru 2 ali samo u pravcu X ose, jer oslonac koji u tom čvoru postoji onemogućava pomeraj i u Y pravcu, odnosno, u tom pravcu pomeranje čvora je unapred zadat, odnosno on je poznat i ima nultu vrednost, odnosno u_2 i $v_2 = 0$. Pomeraji ne postoje ni u čvoru 3, jer prisustvo oslonca u tom čvoru apriori nameće uslov njegovog nultog pomeraja u pravcu obe ose.

Pomeraji svih čvorova su na slici 9 prikazani u razmeri, tako da deformisana trougaona kontura noseće strukture (isprekidane linije) korektno prikazuje promenu oblika u relativnom smislu. Izborom odgovarajućeg faktora razmere, ti pomeraji mogu se učiniti, većim ili manjim, odnosno zadovoljavajuće vidljivim, što je i urađeno na slici 9.



Slika 9

Ovaj, gotovo trivijalni primer, računski nije ni malo jednostavan. Bilo bi potrebno mnogo truda, veštine i mašte da se klasičnim pristupom statike i uz korišćenje definicije krutosti aksijalno opterećenog štapa (elastičnost štapa, pa odatle sve zajedno elastostatika), izračunaju pomeraji čvornih tačaka i reakcije oslonaca. Nasuprot tome, metod konačnih elemenata nudi formalno jednoznačnu proceduru da se takav zadatak uradi računski efikasno i na rutinski način. Zato se, bez preterivanja, može konstatovati da se već na vrlo jednostavnom primeru pokazuje velika praktična vrednost metode konačnih elemenata. To je alat za inženjersko projektovanje koji omogućava rutinsko rešavanje problema statičkog proračuna deformabilnih mehaničkih struktura proizvoljne složenosti. Naravno, isključivo uz primenu računara.

Savremeni CAD paketi za inženjersko projektovanje u sebi sadrže module koji omogućavaju automatsku diskretizaciju (deljenje kontinualne mehaničke strukture na skup međusobno povezanih geometrijskih primitiva, odnosno konačnih elemenata), a zatim izračunavanje pomeraja i napona u ukupnoj strukturi čija se provera ili analiza sprovodi. Projektant primenom ovog alata može iterativnim postupkom da unapredjuje performanse konstruktivnog rešenja. Ovo nas dovodi do suštinske odrednice inženjerskog metoda – optimizacija, odnosno sistematskog unapredjivanja performansi rešenja, korišćenjem neke kriterijumske funkcije. U ovom slučaju je to jedan ili više kriterijuma iz domena elastostatike, odnosno elastostatička optimizacija noseće strukture.

Elastostatička optimizacija podrazumeva postizanje željene krutosti na karakterističnim mestima noseće strukture što se postiže promenom modela:

- a) promenom parametara postojeće topologije i
- b) promenom topologije.

Pod topologijom ovde podrazumevamo skup konačnih elemenata, međusobno povezanih, koji predstavljaju ekvivalentni elastostatički model realne noseće strukture. Promena topologije se postiže promenom broja konačnih elemenata kao i njihovih međusobnih veza.

Promena parametara modela podrazumeva promene parametara konačnih elemenata (po pravilu promene veličina konačnih elemenata). Ovim se menja oblik noseće strukture, ali zadržava polazna topologija.

Projektant može da prepozna delove noseće strukture koji su najopterećeniji i da ih ojača prema potrebi. Takodje, projektant može da prepozna i delove strukture koja je u zadatom slučaju spoljašnjeg opterećenja nedovoljno opterećena i da, shodno tome, ukloni višak materijala, ili kako se to u inženjerskom žargonu kaže: 'da je olakša'. Time se iz noseće strukture uklanjaju pasivne zone, tako da sav upotrebljeni materijal ima svoju aktivnu ulogu. Projektovanje je u ovom slučaju veština racionalnog raspoređivanja materijala i njegovog optimalnog korišćenja. Pored unapredjenja elastostatičkih performansi, ovakav inženjerski pristup u projektovanju nosećih struktura kao konačni ishod ima optimizaciju utroška materijala, odnosno smanjivanje mase noseće strukture, što u vremenu opterećenog ekološkim izazovima i raspoloživosti materijalnih i/ili energetskih resursa, ima veliki značaj. To nas vodi ka jednom bitno širem i društveno odgovornijem konceptu projektovanja, konceptu održivog inženjerskog projektovanje (*sustainable engineering and eco design*).

Parametarska optimizacija

Neka od karakteristika konačnog elemenata može da se ostavi u obliku parametra čije vrednosti mogu da se menjaju. Promena vrednosti parametara u cilju zadovoljavanja neke kriterijumske funkcije vodi ka parametarskoj optimizaciji. Koncept parametarske optimizacije biće objašnjen pomoću trougaone strukture koja je korišćena u prethodnom primeru. Prethodni primer je bio baziran na primeni konačnih elemenata u obliku štapa, pri čemu su svi konačni elementi imali jednaku vrednost poprečnog preseka. Medjutim, to ne mora da bude tako, vrednost poprečnog preseka može da bude različita i kao takva može da bude usvojena kao parametar pomoću kojeg se vrši optimizacija nekog od elastostatičkih svojstava strukture. Konkretno, izgrađićemo elastostatički model za uslov da konačni elementi KE(1), KE(2) i KE(3) imaju vrednost površina poprečnog preseka budu A_1 , A_2 i A_3 respektivno. A optimizacioni problem vezaćemo za optimizaciju krutosti čvora 1.

Promena površine poprečnog preseka konačnog elementa utiče direktno na njegovu matricu krutosti. Zato ćemo reformulisati prethodno izvedene matrice krutosti konačnih elemenata u globalnom koordinatnom sistemu, pa sledi:

$$[K]_{(1)} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}_{(1)} = \frac{EA_1}{125L} \begin{bmatrix} 16 & -12 & \vdots & -16 & 12 \\ -12 & 9 & \vdots & 12 & -9 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -16 & 12 & \vdots & 16 & -12 \\ 12 & -9 & \vdots & -12 & 9 \end{bmatrix}_{(1)}$$

$$[K]_{(2)} = \begin{bmatrix} K_{22} & K_{23} \\ K_{32} & K_{33} \end{bmatrix}_{(2)} = \frac{EA_2}{8L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 0 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(2)}$$

$$[K]_{(3)} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{13} \\ K_{31} & K_{33} \end{bmatrix}_{(3)} = \frac{EA_3}{125L} \begin{bmatrix} 16 & 12 & \vdots & -16 & -12 \\ 12 & 9 & \vdots & -12 & -9 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -16 & -12 & \vdots & 16 & 12 \\ -12 & -9 & \vdots & 12 & 9 \end{bmatrix}_{(3)}$$

uvodjenjem u podmatricu $[Ka]$ dobija se njen opštiji oblik sa eksplicitno vidljivim površinama poprečnog preseka svakog konačnog elementa koji ima uticaj na pomeraj čvora 1:

$$[Ka] = \sum_{(k)} [K_{rs}]_{(k)} = \begin{bmatrix} 16 \frac{EA_1}{125L} + 16 \frac{EA_3}{125L} & -12 \frac{EA_1}{125L} + 12 \frac{EA_3}{125L} & -16 \frac{EA_1}{125L} \\ -12 \frac{EA_1}{125L} + 12 \frac{EA_3}{125L} & 9 \frac{EA_1}{125L} + 9 \frac{EA_3}{125L} & 12 \frac{EA_1}{125L} \\ -16 \frac{EA_1}{125L} & 12 \frac{EA_1}{125L} & 16 \frac{EA_1}{125L} + \frac{EA_2}{8L} \end{bmatrix}$$

Ovim podmatrica $[Ka]$ postaje parametrizovana, odnosno funkcija tri parametra A_1, A_2 i A_3 , koje je dalje moguće nezavisno varirati i time uticati na odziv čvora 1 na spoljašnju pobudu.

Podmatricu $[Ka]$ je moguće srediti i normirati u odnosu na neki od skupa polaznih parametara. Na primer, matricu možemo da normiramo parametrom A_1 pri čemu uvodimo dva nova, kompozitna parametra $A_{21} = A_2/A_1$ i $A_{31} = A_3/A_1$. Ovim se redukuje polazni skup parametara na 2, odnosno redukuje se dimenzionalnost optimizacionog problema, pa sledi:

$$[Ka] = \frac{EA_1}{125L} \begin{bmatrix} 16(1 + A_{31}) & -12(1 - A_{31}) & -16 \\ -12(1 - A_{31}) & 9(1 + A_{31}) & 12 \\ -16 & 12 & 16 + 15.625A_{21} \end{bmatrix}$$

a odatle, sledi:

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = [Ka]^{-1} \begin{Bmatrix} F \\ -F \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{125LF}{EA_1} \begin{bmatrix} 16(1 + A_{31}) & -12(1 - A_{31}) & -16 \\ -12(1 - A_{31}) & 9(1 + A_{31}) & 12 \\ -16 & 12 & 16 + 15.625A_{21} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Eksplisito analitičko rešavanje ovog zadatka zahteva inverziju matrice $[Ka]$. Inverzija matrice je prilično komplikovana operacija. U konkretnom slučaju matrice trećeg reda, sa svim članovima različitim od nule i prilično složenog oblika, inverzija vodi ka vrlo glomaznom rešenju. Da bi se uverili u ovu tvrdnju dovoljno je izračunati $\det[Ka]$! Međutim, tu možemo da se poslužimo MatLab modulom za simboličko izračunavanje, koji matematičke izraze ne tretira na numerički način, već slično čoveku, prepoznaje promenljive i kao takve ih koristi za različite matematičke operacije. Jednostavan programski kod nam omogućava da pokušamo da invertujemo matricu krutosti $[Ka]$ i dodjemo do potrebne analitičke formulacije, očekujući da dobijeni izrazi budu dovoljno jednostavni za potrebe optimizacije.

Sve se kodira u tri reda:

```
syms A21 A31 % deklaracija simboličkih promenljivih
KSa = [16*(1+A31), -12*(1-A31), -16; -12*(1-A31), 9*(1+A31), 12; -16, 12, 16+15.525*A21]; % [Ka]
KSa_INV = inv(KSa) % Simbolička inverzija [Ka]; ispis u Latex formatu: KSa_INV = latex(inv(KSa))
```

što nas dovodi do sledećeg rezultata, u kojem se pojavljuju parametri A_{21} i A_{31} :

```
KSa_INV =
[(621*A21 + 640*A31 + 621*A21*A31)/(39744*A21*A31),
-(640*A31 - 621*A21 + 621*A21*A31)/(29808*A21*A31), 20/(621*A21)]
[-(640*A31 - 621*A21 + 621*A21*A31)/(29808*A21*A31),
(621*A21 + 640*A31 + 621*A21*A31)/(22356*A21*A31), -80/(1863*A21)]
[20/(621*A21), -80/(1863*A21), 40/(621*A21)]
```

Oдавde možemo da izdvojimo elemente podmatrice drugog reda koja određuje pomeraje čvora 1 za zadati jedinični vektor opterećenja i uz zanemarivanje člana $125LF/EA_1$, jer se radi o linearnom sistemu koji je neosetljiv na množenje skalarom, da dodjemo do analitičkih izraza za obe komponente pomeraja čvora 1:

$$u_1 = \frac{621A_{21} + 640A_{31} + 621A_{21}A_{31}}{39744A_{21}A_{31}} - \frac{640A_{31} - 621A_{21} + 621A_{21}A_{31}}{29808A_{21}A_{31}}$$

$$v_1 = -\frac{640A_{31} - 621A_{21} + 621A_{21}A_{31}}{29808A_{21}A_{31}} + \frac{621A_{21} + 640A_{31} + 621A_{21}A_{31}}{22356A_{21}A_{31}}$$

Mada svaki analitički izraz ima svoju posebnu vrednost (ništa nije tako dobro za optimizaciju kao analitički formulisan problem!), u ovom slučaju je očigledno da je njegova formulacija nepogodna za dalji ručni rad (nelinearna racionalna funkcija!). Zato je racionalnije dalji proces optimizaciji nastaviti primenom računara i numeričke analize. To je, uostalom, u inženjerskom duhu, gde se umesto savršenosti uvek teži praktično upotrebljivom kompromisu.

Jednostavnim kodom u MatLab programskom paketu, ili bilo kom drugom višem jeziku, moguće je kodirati parametrizovanu jednačinu pomeraja, varirati vrednosti parametara u nekom intervalu, na primer $A_{21}, A_{31} = (0.2, 3)$, i zatim sprovesti analizu dobijenih rezultata sa fokusom na elastostatička svojstva razmatrane strukture u čvoru 1.

Dalje se navodi izvorni kod koji se sastoji iz tri celine: a)polazne specifikacije, b)dvostruka for petlja za izračunavanje pomeraja i c)prikaz rezultata.

```
% cvor_1
% Ispitivanje ponasanja trougaone planarne strukture u cvoru 1 u funkciji
% parametra A21=A2/A1 i A31=A3/A1, odnosno relativnog odnosa poprečnog
% preseka konacnih elemenata KE(1), KE(2) i KE(3)
%
% mfb pbp 2020.04

clear, close all, clc

% =====
% VEKTOR OPTERECENJA
F = [1, -1, 0]';
% =====

% =====
% PARAMETRI MODELA

A21=0.2:0.1:3; % Parametar varira u intervalu 0.2 do 3, inkrement 0.1
A31=0.2:0.1:3;

% =====
% MATRICA KRUTOSTI I VEKTOR POMERAJA
n=length(A21);
for i=1:n
    for j=1:n
        % Izracunavanje matrice krutosti Ka za tekucu vrednost A21 i A31
        Ka(1,1)=16*(1+A31(j)); Ka(1,2)=-12*(1-A31(j)); Ka(1,3)=-16;
        Ka(2,1)=Ka(1,2); Ka(2,2)=9*(1+A31(j)); Ka(2,3)=12;
        Ka(3,1)=Ka(1,3); Ka(3,2)=Ka(2,3); Ka(3,3)=16+15.625*A21(i);
        KSa=Ka./125;
        % VEKTOR POMERAJA
        % Izracunavanje vektora pomeraja slobodnih cvorova za jedinicnu spoljasnju
        % pobudu strukture
        delta = inv(KSa)*F;
        u1(i,j)=delta(1); v1(i,j)=delta(2); u2(i,j)=delta(3);
    end
end
% =====

% PRIKAZ REZULTATA
[X,Y] = meshgrid(A21,A31);
```

```

figure(1), subplot(1,2,1)
surf(X,Y,u1)
set(gca,'Ydir','reverse', 'FontSize', 12)
xlabel('A21', 'FontSize', 12), ylabel('A31', 'FontSize', 12)
zlabel('Pomeraj u1', 'FontSize', 12)

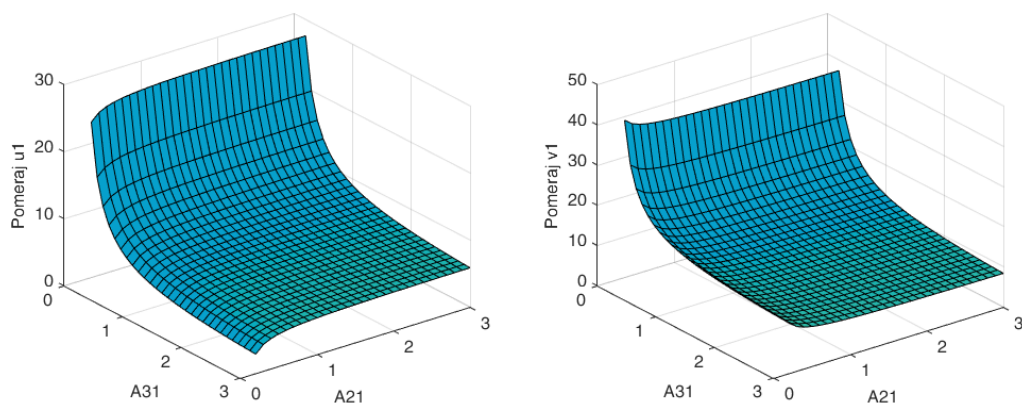
subplot(1,2,2)
surf(X,Y,-v1)
set(gca,'Ydir','reverse', 'FontSize', 12)
xlabel('A21', 'FontSize', 12), ylabel('A31', 'FontSize', 12)
zlabel('Pomeraj v1', 'FontSize', 12)

figure(2), subplot(1,2,1)
surf(X,Y,abs(v1./u1))
xlabel('A21', 'FontSize', 12), ylabel('A31', 'FontSize', 12)
zlabel('Odnos pomeraja v1/u1', 'FontSize', 12)
set(gca,'Xdir','reverse', 'FontSize', 12)

subplot(1,2,2)
surf(X,Y,abs(v1./u1))
xlabel('A21', 'FontSize', 12), ylabel('A31', 'FontSize', 12)
zlabel('Odnos pomeraja v1/u1', 'FontSize', 12)
hold on
s=surf(X,Y,v1.*0.+2)
s.FaceColor=[1 1 1]
hold off
set(gca,'Xdir','reverse', 'FontSize', 12)
% =====

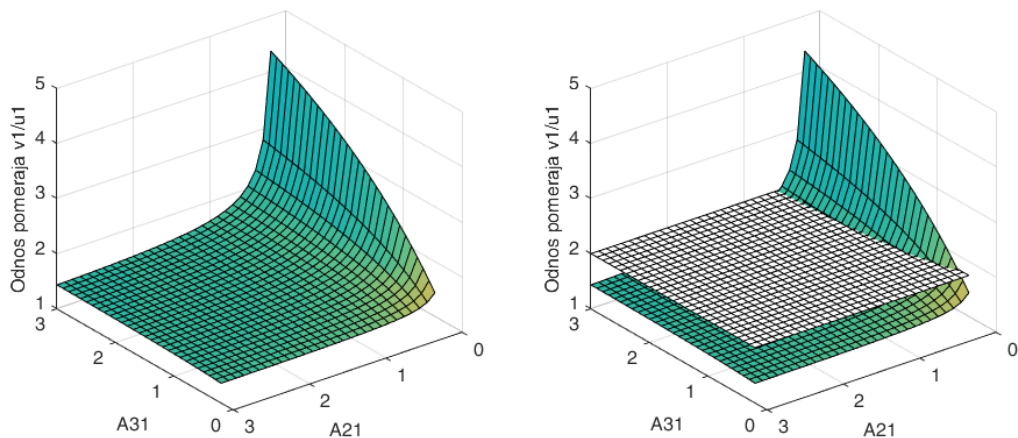
```

Izračunati pomeraji duž dve ortogonalne ose prikazani su na slici 10. Očigledno je da dominantan uticaj ima parametar koji vezujemo za KE(3), u čitavom posmatranom opsegu njegovog variranja, dok je parametar koji povezujemo sa KE(2) prilično pasivan i da potpuno nestaje za $A_{21} > 1.5$. To praktično znači da se najveći uticaj na svojstva krutosti čvora 1 ostvaruje preko KE(3). Na primer, ukoliko bi krutost želeli da povećamo (manji pomeraj!) onda bi trebalo povećavati poprečni presek KE(3), dok bi poprečni presek KE(2) mogao čak i da se smanji i da bude manji od poprečnog preseka KE(1). Optimizacija ove vrste bi dalje zahtevala ulazak u brojne vrednosti, što nije cilj ove analize. Suština je da se primeti kako se sagledavanjem karaktera uticaja ovih parametara mogu da donose kvalitetnije odluke od onih koje bi bile bazirane na intuiciji.



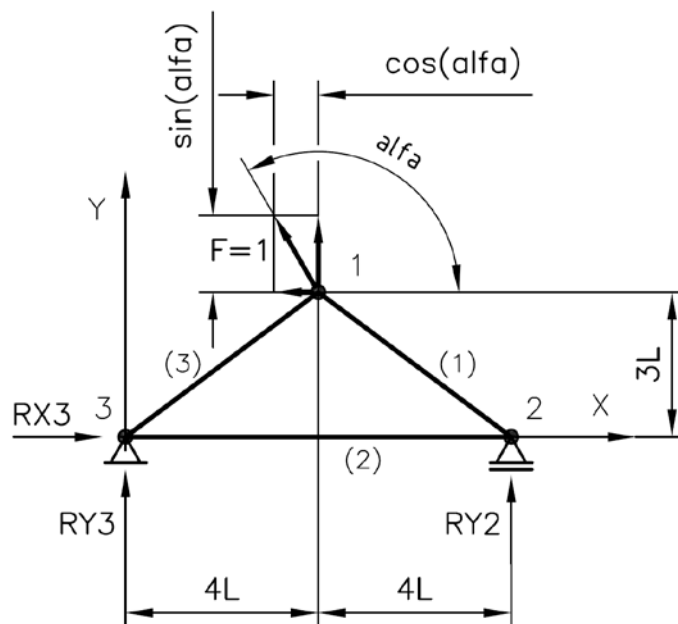
Slika 10

Drugi kriterijum koji bi mogao da bude korišćen za optimizaciju je povezan sa odnosom popustljivosti u pravcu X i Y ose. Ovim se otvara vrlo bitno pitanje izotropnosti, odnosno uniformnosti pomeraja u različitim pravcima. 3D grafici na slici 11 pokazuju kakav uticaj po tom kriterijumu imaju razmatrani parametri. Kao i u prethodnom slučaju, ali još izraženije, KE(2) ima vrlo mali uticaj. Na desnom grafiku je uvedena pomoćna horizontalna ravan za odnos $v_1/u_1 = 2$ koja jasno pokazuje da se uticaj na karakter popustljivosti strukture u čvoru 1 dominantno ostvaruje promenom poprečnog preseka KE(2). Takodje, ovim grafikom se jasno pokazuje da poprečni presek KE(2) može da bude značajno manji od poprečnog preseka KE(1), čak manji i od 0.5 a da to bitno ne naruši svojstva (kvazi) izotropnosti. Ipak, na ovo pitanje nemoguće je dati odgovor kroz ovakav kontekst parametarske analize. Potrebno je sprovesti detaljniju analizu i ispitati ponašanje kompletne strukture iterativnim uvođenjem spoljašnjeg opterećenja koje deluje u većem broju pravaca i za njih izračunati pomeraje, a na bazi toga izračunati i karakteristiku, odnosno mapu krutosti, ili popustljivosti čvora 1. Ovakva analiza zahteva primenu složenijeg matematičkog aparata.



Slika 11

Sledeći prethodno navedenu ideju, na slici 12 je prikazan koncept eksperimenta sukcesivnog opterećivanja strukture jediničnim spoljašnjim opterećenjem koje deluje u pravcu pod uglom α u odnosu na X osu. Ovaj jedinični vektor ima svoje dve komponente $F_X = \cos(\alpha)$ i $F_Y = \sin(\alpha)$.



Slika 12

Variranjem ugla *alfa* i izračunavanjem odgovarajućih pomeraja čvora 1 generiše se skup tačaka koji se dalje može analizirati i na osnovu toga steći dublji i precizniji uvid u svojstva razmatrane deformabilne strukture. Ovaj zadatak zahteva obimna izračunavanja koja se mogu sprovesti pomoću računara. Dalje se navodi kod napisan u MatLab programskom paketu.

```
% MKE_Stat_OPT
% Elastostatika: Program za demonstraciju primene Metode Konacnih Elemenata u proracunu
% i optimizaciji statickih svojstava deformabilne nosece strukture.
% Razmatra se PRIMER trougaone planarne strukture koja se modelira sa tri stapa.
% Izracunavaju se:
% - ukupna matrica krutosti K
% - vektor pomeraja slobodnih cvornih tacaka
% - vektor reakcija oslonaca
% Poprečni presek svih konacnih elemenata je parametrizovan i vazni:
% - KE(1): A1=1,
% - KE(2): A2 ... normirano A21=A2/A1, prvi parametar
% - KE(3): A3 ... normirano A31=A3/A1, drugi parametar
% Problem optimizacije demonstrira se kroz modulaciju krutosti sturkture u
% cvoru 1 rucnim variranjem vrednosti parametara
%
% mfb_pbp 2020.03.30

close all, clear, clc
% =====

% DEFINISANJE MODELA
% =====
% Opsti uslovi: E=1, L=1
% Koordinate cvorova
cvor_X=[4, 8, 0]; % X koordinate cvorova
cvor_Y=[3, 0, 0]; % X koordinate cvorova
% Opis elemenata KE(1)=ke(1,:), KE(2)=ke(2,:), KE(3)=ke(3,:)
ke=[1,2; 2,3; 1,3]; % Matrica konekcija
% Poprečni presek konacnog elementa
A21 = 1; A31 = 1; % PARAMETRI inicijalne postavke zadatka
A21 = 1; A31 = 0.5; % PARAMETRI korigovane strukture

% =====
% Izracunavanje transformacione matrice za svaki KE
% Transformacione matrice KE se pakuju u jedinstvenu matricu T
for i=1:3 % KE(i)
    % definisanje indeksa cvora 1 i cvora 2 konacnog elementa KE(i)
    cvor_I=ke(i,1);cvor_J=ke(i,2);
    % izracunavanje duzine konacnog elementa KE(i)
    L(i)=sqrt((cvor_X(cvor_I)-cvor_X(cvor_J))^2+(cvor_Y(cvor_I)-cvor_Y(cvor_J))^2);
    j=2*(i-1); % pomocni indeks za slaganje matrica KE u jedinstvenu matricu T
    T(j+1,1)=(cvor_Y(cvor_J)-cvor_Y(cvor_I))/L(i); % elemenat T_1,1(KE(i))
    T(j+1,2)=-(cvor_X(cvor_J)-cvor_X(cvor_I))/L(i); % elemenat T_1,2(KE(i))
    T(j+2,1)=-T(j+1,2); % elemenat T_2,1(KE(i))
    T(j+2,2)=T(j+1,1); % elemenat T_2,2(KE(i))
end
% =====
A = [1, A21, A31]; % Vektor poprečnih preseka konačnih elemenata
% Preslikavanje matrice krutosti KE iz lokalnog u globalni koordinatni sistem
% Lokalne podmatrice krutosti
```

```

Krr=[0,0; 0,1]; Krs=[0,0; 0,-1];
% Podmatrice krutosti KE(i) u globalnom koordinatnom sistemu:
% Matrica krutosti KE(1);
k1_11 = T(1:2,:)'*Krr*T(1:2,:). *A(1)./L(1); k1_22 = k1_11;
k1_12 = T(1:2,:)'*Krs*T(1:2,:). *A(1)./L(1); k1_21 = k1_12;
% Matrica krutosti KE(2);
k2_22 = T(3:4,:)'*Krr*T(3:4,:). *A(2)./L(2); k2_33 = k2_22;
k2_23 = T(3:4,:)'*Krs*T(3:4,:). *A(2)./L(2); k2_32 = k2_23;
% Matrica krutosti KE(3);
k3_11 = T(5:6,:)'*Krr*T(5:6,:). *A(3)./L(3); k3_33 = k3_11;
k3_13 = T(5:6,:)'*Krs*T(5:6,:). *A(3)./L(3); k3_31 = k3_13;
% =====

% =====
% Sastavljanje MATRICE KRUTOSTI SISTEMA
KS(1:2,1:2)=k1_11+k3_11; KS(1:2,3:4)=k1_12; KS(1:2,5:6)=k3_13;
KS(3:4,1:2)=k1_21; KS(3:4,3:4)=k1_22+k2_22; KS(3:4,5:6)=k2_23;
KS(5:6,1:2)=k3_31; KS(5:6,3:4)=k2_32; KS(5:6,5:6)=k2_33+k3_33;
% =====

% =====
% PODMATRICE KRUTOSTI
% Izdvajanje podmatrica
% KSa - podmatrica za izracunavanje vektora nepoznatih pomeraja
% KSb - podmatrica za izracunavanje vektora nepoznatih reakcija oslonaca
KSa = KS(1:3,1:3);
KSb = KS(4:6,1:3);
% =====

% VEKTOR OPTERECENJA
% Struktura se opterecuje jedinicnim opterecenjem, odnosno vektor pobude
% JEDINICNOG INTENZITETA, sto je dozvoljeno jer je MKE model linearan i
% prema tome, dozvoljava slobodnu promenu vrednosti mnozioca.
F = [sqrt(2)/2, -sqrt(2)/2, 0]'; %Normirani vektor inicijalnog opterecenja
% =====

% VEKTOR POMERAJA
% Izracunavanje vektora pomeraja slobodnih cvorova za jedinicnu spoljasnju
% pobudu strukture
delta = inv(KSa)*F
% =====

% VEKTOR REAKCIJA OSLOKACA
% Izracunavanje reakcija oslonaca za jedinicnu spoljasnju pobudu
%Vektor reakcije oslonaca
R = KSb*delta
% =====

% =====
% IZRACUNAVANJE ELIPSE KRUTOSTI STRUKTURE U CVORU 1
% Elipsa krutosti se izracunava variranjem smera pobude u intervalu od 0 do
% 180 stepeni, proizvoljno birajuci ugaoni inkrement i izracunavanjem
% pripadajucih vektora pomeraja.
% Zatim se za tako dobijen skup tacaka u ravni odredjuju parametri elipse
% kojom se taj skup aproksimira. Na osnovu tih parametara izracunavaju se
% elementi dvodimenzione matrice krutosti
%
% OPTIMIZACAIJA u ovom slucaju podrazumeva promenu poprecnih preseka KE(2)

```

```

% i KE(3) relativno u odnosu na KE(1) sve dok se ne dostigne zeljeni oblik
% matrice krutosti cvorne tacke 2

% =====
% Prvo se formira skup uglova pod kojim ce delovati jedinicna pobuda,
% proizvoljnim izborom inkrementa delta_alfa
d_alfa = pi/17;
alfa = 0:d_alfa:2*pi;
% Zatim se za svaki pravac izracunava vektor pobude i odgovarajuci pomeraj cvora 2

n=length(alfa);
for i = 1:n-1
    F_alfa(:,i)=[cos(alfa(i)), sin(alfa(i)), 0]'; % Vektor pobude
    delta_alfa(:,i) = inv(KSa)*F_alfa(:,i); % Vektor pomeraja
    R_alfa(:,i) = KSb*delta_alfa(:,i); % Vektor reakcija oslonaca
end
% Izracunavanje parametara elipse koja aproksimira skup pomeraja delta_alfa
% Poziva se funkcija fitellip koja obavlja ovaj zadatak i vraca parametre
% analitickog modela elipse u kanonickoj formi a(1) do a(6):
%      a(1)x^2 + a(2)xy + a(3)y^2 + a(4)x + a(5)y + a(6) = 0
% Za izracunavanje parametar elipse koristi se Taubinova metoda koja se
% generalno promenjuje za sve konicne preseke. Postoji rizik da, ukoliko se
% proceni da skup ulaznih tacaka bolje aproksimira parabola (jedan od
% konicnih preseka), izlaz procesa aproksimacije ce biti parabola a ne
% elipsa, sto je u ovom slucaju pogresno, jer elastostaicko ponasanje
% cvorne tacke 2 ni u kom slucaju ne moze da bude opisano parabolom. Da bi
% se to izbeglo neophodno je da ulazni skup tacaka bude dovoljno
% diskriminativan, sto se u ovom konkretnom slucaju simulacionog
% generisanja tacaka lako postize. Problem su eksperimentalna merenja koja,
% pored malog broja tacaka sadrze i sum, odnosno poremeceje koji dolaze iz
% procesa merenja.
% Za ulazni vektor tacaka algoritam vraca izlaz u formi:
%   out = [ ap bp phi x0 y0 a b c d f g]
% pri cemu je:
%   A = [a b c d e f]' je vektor algebarskih parametara jednacine elipse:
%       ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0
%   vektora A je normiran, tako da je ||A||=1
%   x0, y0 su koordinate centra elipse, u ovom slucaju oba jednaka nuli
%   (centar elipse koincidra ca cvorom 2)
%   ap, bp su veci i manji radijus elipse, odnosno parametri kanonicne
%   forme elipse x^2/a^2 + y^2/b^2=1
%
% estimacija parametara elipse krutosti korigovane strukture
% poziva funkciju EllipseFitByTaubin.m
K2_elipsa = EllipseFitByTaubin(delta_alfa')

% parametri estimirane elipse krutosti polazne strukture
K2_elipsa_0 = [4.6836 11.7226 0.4299 0.0000 0.0000 ...
              -0.0389 -0.0145 -0.0139 0.0000 0.0000 0.9987];

% priprema za crtanje
% prvo se generisu vektor centralne elipse u glavnim koordinatama
x_est_G(1,:) = cos(alfa)*K2_elipsa(1);
x_est_G(2,:) = sin(alfa)*K2_elipsa(2);
% a zatim se rotira glavni koordinatni sistem za ugao phi
phi = K2_elipsa(3); phi_deg = phi*180/pi % ugao rotacije glavnih koordinata

```



```

Rot = [cos(phi),-sin(phi); sin(phi),cos(phi)]; % rotaciona matrica
x_est = Rot*x_est_G; % estimirana elipsa u koordinatama modela nosece strukture
ekscentricnost = sqrt(1-K2_elipsa(1)^2/K2_elipsa(2)^2)
% Tacke ellipse inicijalnog/nekorigovanog stanja:
x_est_G_0(1,:) = cos(alfa)*K2_elipsa_0(1); x_est_G_0(2,:) = sin(alfa)*K2_elipsa_0(2);
phi_0 = K2_elipsa_0(3); phi_0_deg = phi_0*180/pi
Rot_0=[cos(phi_0),-sin(phi_0); sin(phi_0),cos(phi_0)];
x_est_0=Rot_0*x_est_G_0;
ekscentricnost_0 = sqrt(1-K2_elipsa_0(1)^2/K2_elipsa_0(2)^2)
% =====
% Zatim se vrsi graficki prikaz dobijenih rezultata
figure(1)
plot(x_est_0(1,:), x_est_0(2,:), 'k', 'LineWidth', 2), grid on % prikaz inicijalne konfig
hold on
plot(delta_alfa(1,:), delta_alfa(2,:), 'o', 'MarkerFaceColor', 'cyan')
plot(x_est(1,:), x_est(2,:), 'LineWidth', 1)
plot(0,0,'o','MarkerEdgeColor','k','MarkerFaceColor','k', 'MarkerSize', 20)
hold off, axis equal
set(gca,'FontSize',12)
xlabel('Pomeraj po X-osi (u1)', 'FontSize',14)
ylabel('Pomeraj po Y-osi (v1)', 'FontSize',14)
%title('ELIPSA KRUTOSTI u CVORU 2', 'FontSize',18)
lgd=legend('Inicijalno stanje', 'Korigovano stanje - MKE', 'Korigovano stanje - FIT',...
'CVOR 1', 'Location', 'southeastoutside');
lgd.FontSize = 16; lgd.EdgeColor=[0.9 0.9 0.9]; lgd.Color=[0.9 0.9 0.9]; box off

```

Dalje sledi kod funkcije za izračunavanje parametara elipse primenom Taubinove metode:

```

function out = EllipseFitByTaubin(XY);
%
% Ellipse fit by Taubin's Method published in
% G. Taubin, "Estimation Of Planar Curves, Surfaces And Nonplanar
% Space Curves Defined By Implicit Equations, With
% Applications To Edge And Range Image Segmentation",
% IEEE Trans. PAMI, Vol. 13, pages 1115-1138, (1991)
%
% Input: XY(n,2) is the array of coordinates of n points x(i)=XY(i,1), y(i)=XY(i,2)
%
% Output: A = [a b c d e f]' is the vector of algebraic
% parameters of the fitting ellipse:
%  $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ 
% the vector A is normed, so that  $\|A\| = 1$ 
%
% Among fast non-iterative ellipse fitting methods,
% this is perhaps the most accurate and robust
%
% Note: this method fits a quadratic curve (conic) to a set of points;
% if points are better approximated by a hyperbola, this fit will
% return a hyperbola. To fit ellipses only, use "Direct Ellipse Fit".
%
centroid = mean(XY); % the centroid of the data set

Z = [(XY(:,1)-centroid(1)).^2, (XY(:,1)-centroid(1)).*(XY(:,2)-centroid(2)),...
(XY(:,2)-centroid(2)).^2, XY(:,1)-centroid(1), XY(:,2)-centroid(2), ones(size(XY,1),1)];
M = Z'*Z/size(XY,1);

```

```

P = [M(1,1)-M(1,6)^2, M(1,2)-M(1,6)*M(2,6), M(1,3)-M(1,6)*M(3,6), M(1,4), M(1,5);
     M(1,2)-M(1,6)*M(2,6), M(2,2)-M(2,6)^2, M(2,3)-M(2,6)*M(3,6), M(2,4), M(2,5);
     M(1,3)-M(1,6)*M(3,6), M(2,3)-M(2,6)*M(3,6), M(3,3)-M(3,6)^2, M(3,4), M(3,5);
     M(1,4), M(2,4), M(3,4), M(4,4), M(4,5);
     M(1,5), M(2,5), M(3,5), M(4,5), M(5,5)];

Q = [4*M(1,6), 2*M(2,6), 0, 0, 0;
     2*M(2,6), M(1,6)+M(3,6), 2*M(2,6), 0, 0;
     0, 2*M(2,6), 4*M(3,6), 0, 0;
     0, 0, 0, 1, 0;
     0, 0, 0, 0, 1];

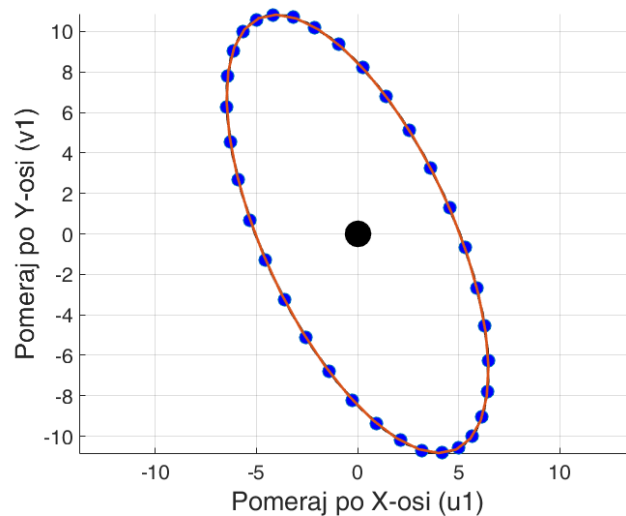
[V,D] = eig(P,Q); [Dsort,ID] = sort(diag(D));

A = V(:,ID(1));
A = [A; -A(1:3)*M(1:3,6)];
A4 = A(4)-2*A(1)*centroid(1)-A(2)*centroid(2);
A5 = A(5)-2*A(3)*centroid(2)-A(2)*centroid(1);
A6 = A(6)+A(1)*centroid(1)^2+A(3)*centroid(2)^2+...
     A(2)*centroid(1)*centroid(2)-A(4)*centroid(1)-A(5)*centroid(2);
A(4) = A4; A(5) = A5; A(6) = A6;
A = A/norm(A);

a = A(1); b = A(2)/2; c = A(3); d = A(4)/2; f = A(5)/2; g = A(6);
x0 = (c*d-b*f)/(b^2-a*c); y0 = (a*f-b*d)/(b^2-a*c);
ap = (2*(a*f^2+c*d^2+g*b^2-2*b*d*f-a*c*g)/((b^2-a*c)*(((a-c)^2+4*b^2)^0.5-(a+c))))^0.5;
bp = (2*(a*f^2+c*d^2+g*b^2-2*b*d*f-a*c*g)/((b^2-a*c)*(-(a-c)^2+4*b^2)^0.5-(a+c))))^0.5;
if(a<c)
    phi = 0.5*acot((a-c)/(2*b));
else
    phi = pi()/2 + 0.5*acot((a-c)/(2*b));
end
out = [ ap bp phi x0 y0 a b c d f g];
end % Taubin

```

Na slici 13 navode se rezultati analize elastostatičkog ponašanja strukture u tački 1.



Slika 13

Skup plavo obojenih tačaka predstavlja pomeraje izračunate promenom pravca delovanja spoljašnjeg opterećenja u tački 1. Očigledno je da su te tačke ravanski rasporedjene tako da odgovaraju obliku elipse. Polazeći od te pretpostavke, ovaj skup tačaka aproksimiran je elipsom koristeći Taubinovu metodu. Dobijeni rezultat je prikazan crvenom linijom. Uočava se da je poklapanje savršeno. Takođe, uočava se i da je elipsa izduženija u vertikalnom pravcu, što znači da je struktura kruća u horizontalnom pravcu. Takođe, uočava se da je glavna osa elipse nagnuta u odnosu na Y osu, što znači da će svako dejstvo sile u pravcu Y ose proizvoditi, pored pomeraja duž vertikalne ose i pomeraj duž horizontalne ose. Ovu pojavu nazivamo anizotropijom. Dalje, se prethodno navedeno kvantifikuje konkretnim vrednostima.

Elipsa je zatvorena kriva drugog reda, koja spada u takozvane konične preseke. Konični presek je određen polinomom drugog reda, koji za ravanski slučaj glasi::

$$Q(x, z) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

Ovaj polinom se može napisati u matričnom obliku:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + f = 0$$

Za dalju analizu su značajna prva tri člana. Ograničavajući se na ovaj degenerativni oblik polazne jednačine, sledi:

$$Q(x, y) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = ax^2 + bxy + cy^2$$

Ovim se polazni polinomalni oblik svodi na takozvanu kvadratnu formu, koja se kompaktno matrično zapisuje:

$$Q(x, y) = X^T A X$$

pri čemu je:

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}$$

Medjutim, elipsa se u Dekartovom koordinatnom sistemu može zapisati i u kanoničnom obliku:

$$\frac{(x - x_0)^2}{p^2} + \frac{(y - y_0)^2}{q^2} = 1$$

pri čemu su p i q veći i manji poluprečnik elipse, respektivno, a x_0 , y_0 su koordinate centra elipse. Glavne ose ovako definisane elipse su paralelne sa osama koordinatnog sistema. Zakretanje glavnih osa elipse u odnosu na koordinatne ose za ugao θ može se dobiti primenom rotaciona matrice, koja rotira koordinatni sistem, odakle sledi:

$$X = (x - x_0) \cos \theta + (y - y_0) \sin \theta$$

$$Y = -(x - x_0) \sin \theta + (y - y_0) \cos \theta$$

Između ova dva analitička oblika može se uspostaviti sledeća zavisnost:

$$a = p^2(\sin \theta)^2 + q^2(\cos \theta)^2$$

$$b = 2(q^2 - p^2) \sin \theta \cos \theta$$

$$c = p^2(\cos \theta)^2 + q^2(\sin \theta)^2$$

$$d = -2ax_0 - by_0$$

$$e = -bx_0 - 2cy_0$$

$$f = ax_0^2 + bx_0y_0 + cy_0^2 - p^2q^2$$

dok za preslikavanje u suprotnom smeru važi:

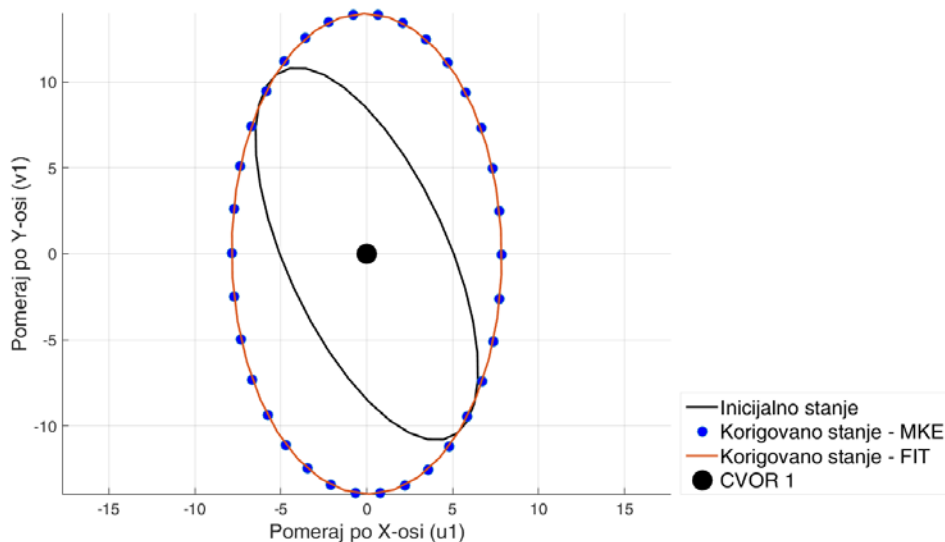
$$p, q = \frac{-\sqrt{2(ae^2 + cd^2 + bde + (b^2 - 4ac)f)(a + c \pm \sqrt{(a - c)^2 + b^2})}}{b^2 - 4ac}$$

$$x_0 = \frac{2cd - be}{b^2 - 4ac}$$

$$y_0 = \frac{2ae - bd}{b^2 - 4ac}$$

$$\theta = \begin{cases} \operatorname{atan}\left(\frac{1}{b}\left(c - a - \sqrt{(a - c)^2 + b^2}\right)\right), & b \neq 0 \\ 0, & b = 0, \quad a < c \\ \pi/2, & b = 0, \quad a > c \end{cases}$$

Prethodno navedene jednačine su sadržane u MatLab kodu koji je napisan za ove potrebe. Za inicijalno stanje je izračunato sledeće: $p = 11.7226$, $q = 4.6836$ i $\theta = 24.6315$.

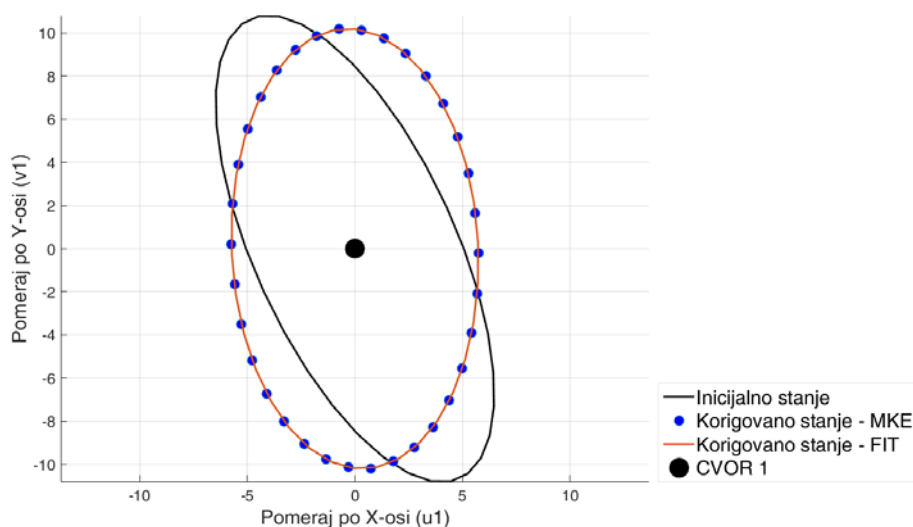


Slika 14

Medjutim, ukoliko se postavi zahtev $\theta \sim 0$, onda je moguće variranjem parametara A_{21} i A_{31} i praćenjem kako oni utiču na elipsu krutosti za čvor 1 doći do takvih parametara koji će zadovoljiti postavljene zahteve.

Posle par pokušaja, intuitivnim putem se dolazi do zaključka da se smanjivanjem poprečnog preseka $KE(3)$ elipsa postepeno rotira u pravcu smanjivanja ugla θ i da se za $A_{21}=1$ i $A_{31}=0.5$ taj ugao skoro

izjednačava sa nulom, čime sa dolazi do potrebnog rešenja. Ova parametarska varijacija menja kompletnu elipsu krutosti, menjajući tako i svojstva krutosti strukture u čvoru 1. Dobijene promene na korigovanoj strukturi prikazane su na slici 14. Radi poredjenja, nacrtana je elipsa krutosti i polazne strukture. Parametri nove elipse krutosti (prikazana linijom crvene boje) glase: $p = 13.9729$, $q = 7.8587$ i $\theta = 0.5857$.



Slika 15

Uočavamo da su poluprečnici korigovane elipse krutosti veći, što znači da smo ovakvim izborom parametara smanjili krutost strukture u čvoru 2. Ukoliko, međjutim, usvojimo $A_{21}=2$ i $A_{31}=0.7$, onda se dobija elipsa krutosti, slična inicijalnoj, ali uz ispunjen zahtev nultog ugla rotacije (slika 15). Konkretno, tada parametri elipse krutosti dobijaju vrednosti: $p = 10.2209$, $q = 5.7328$, $\theta = 2.7780$. Ovim je zadovoljen postavljeni zahtev optimizacije polazne konstrukcije.

Medjutim, identifikovana elipsa nije samo geometrijski oblik koji smo identifikovali tragajući za svojstvima razmatrane elastomehaničke strukture u čvoru 1. Ona u sebi krije jednu bitnu informaciju. Da bi je otkrili moramo da odemo još jedan korak dalje, u oblast takozvanih sopstvenih vrednosti i sopstvenih vektora matrice A kvadratne forme $Q(x, y) = X^T A X = 0$.

Matrica A je simetrična i nedijagonalna. Za svaku simetričnu matricu može se napisati:

$$AX = \lambda X \rightarrow (A - \lambda I)X = 0$$

Za netrivialno rešenje ove jednačine, odnosno za $X \neq 0$, sledi:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

odnosno u razvijenom obliku:

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b/2 \\ b/2 & c - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

što dalje, izračunavanjem vrednosti determinante, vodi ka polinomu drugog reda po nepoznatoj promenljivoj λ koji nazivamo karakterističnom jednačinom matrice A :

$$(a - \lambda)(c - \lambda) - \frac{b^2}{4} = 0 \rightarrow \lambda^2 - \lambda(a + c) + (ac - \frac{b^2}{4})$$

Ova jednačina ima $n = 2$ rešenja:

$$\lambda_{1,2} = \frac{a + c \pm \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 2ac}}{2}$$

koje nazivamo spektrom matrice A . Smenom sopstvenih vrednosti u polaznu matričnu jednačinu, sledi:

$$(A - \lambda_i I)X = 0$$

odnosno:

$$\begin{bmatrix} a - \lambda_i & b/2 \\ b/2 & c - \lambda_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \rightarrow X_{\lambda_i}$$

$$X_{\lambda_1} = \begin{bmatrix} \left(\frac{a - c - \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 2ac}}{b} \right) \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$X_{\lambda_2} = \begin{bmatrix} \left(\frac{a - c + \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 2ac}}{b} \right) \\ 1 \end{bmatrix}$$

čija dva rešenja X_{λ_i} nazivamo sopstvenim vektorima matrice A . Normiranjem X_{λ_i} skup sopstvenih vektora matrice A se prevodi u njima ekvivalentan skup jediničnih vektora, odnosno:

$$X_{\lambda_i} \rightarrow \mu_i$$

koji se mogu grupisati u kvadratnu matricu:

$$[\mu_1 \quad \mu_2] = P$$

koja određuje ortonormalnu bazu novog koordinatnog sistema $x'Oy'$ čije koordinate nazivamo glavnim koordinatama matrice A .

Prethodnim se polazna $AX = \lambda X$ dovodi na oblik:

$$AP = P\Lambda \rightarrow P^{-1}AP = \Lambda, \quad A = P\Lambda P^{-1}$$

kojim se matrica A , koja je u opštem slučaju nedijagonalna, prevodi u njoj ekvivalentnu dijagonalnu matricu Λ , iskazanu u koordinatnom sistemu $x'Oy'$. Ovim se prethodno navedene polinomalne ili kanonične jednačine elipse u ravni svode na njihov najjednostavniji oblik, odnosno specijalni oblik u kojem se glavne ose elipse podudaraju sa koordinatnim osama, pa važi:

$$Q(x', y') = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$$

odnosno:

$$\frac{(\mu_1^T X)^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\right)^2} + \frac{(\mu_2^T X)^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\right)^2} = \frac{x'^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\right)^2} + \frac{y'^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\right)^2} = 1$$

pri čemu se polazni koordinatni sistem transformiše u:

$$X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = PX = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{21} \\ \mu_{12} & \mu_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

a matrica P pojavljuje kao transformaciona matrica koja rotira koordinatni sistem za ugao:

$$\theta = \begin{cases} \operatorname{atan}\left(\frac{1}{b}(c - a - \sqrt{(a - c)^2 + b^2})\right), & b \neq 0 \\ 0, & b = 0, \quad a < c \\ \pi/2, & b = 0, \quad a > c \end{cases}$$

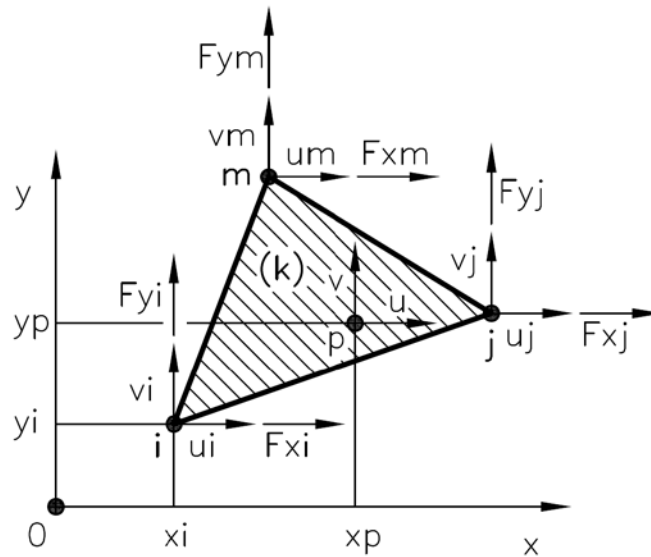
Matrica A i njen dijagonalni ekvivalent Λ imaju fizički smisao matrice krutosti čvora 1 a njen geometrijski smisao iskazan je elipsom. Sopstvene vrednosti matrice A određuju minimalnu i maksimalnu krutost (krutost kao inverzija popustljivosti!), dok sopstveni vektori određuju pravce u kojima se razmatrana elastostatička struktura posmatrana u čvoru 1 ponaša izotropno.

Sprovedena analiza ponašanja i optimizacija parametara pokazuju kako se konačni elementi mogu efektivno iskoristiti za optimizaciju nosećih struktura. Metoda konačnih elemenata je moćan alat za inženjersko projektovanje koji omogućava efikasno projektovanje i postizanje optimalnih rešenja kroz formalno konsekventan okvir, sa minimumom intuicije.

Konačni element u obliku trougla

Pored konačnog elementa u obliku štapa, za modeliranje ravanskih struktura mogu se izgraditi i konačni elementi složenijeg oblika. To su dvodimenzionalni, površinski elementi. Najjednostavniji među njima je konačni element u obliku trougla.

Na slici 16 prikazane su osnovne oznake i lokacija konačnog elementa u lokalnom koordinatnom sistemu $x0y$. Konačni element je određen sa tri čvora, (i, j, m) , čija je lokacija proizvoljno izabrana. Prvo se izvodi funkcija pomeraja, zatim se izvode analitički izrazi za deformacije, pa napone i na kraju, izvodi se matrica krutosti.



Slika 16

I Funkcija pomeraja

Vektor spoljašnjih opterećenja:

$$\{F\}_{(k)} = \{F_{xi} \quad F_{yi} : F_{xj} \quad F_{yj} : F_{xm} \quad F_{zm}\}^T$$

Vektor pomeraja čvorova:

$$\{\delta\}_{(k)} = \{u_i \quad v_i : u_j \quad v_j : u_m \quad v_m\}^T$$

Koordinate čvorova:

$$i: (x_i, y_i), \quad j: (x_j, y_j), \quad m: (x_m, y_m)$$

Pomeraj u bilo kojoj tački p duž štapa definisan je sledećim linearnim modelom:

$$\begin{aligned} u &= a_1 + a_2x + a_3y \\ v &= a_4 + a_5x + a_6y \end{aligned}$$

odnosno, u matričnom obliku:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & : & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & : & 1 & x & y \end{bmatrix} \{a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6\}^T$$

odnosno:

$$\{f\} = [N]\{a\}, \text{ (A)}$$

pri čemu je: f = vektorska funkcije pomeraja tačke p , a = vektor nepoznatih koeficijenata linearnog modela funkcije pomeraja f i N = matrica oblika konačnog elementa. Vektor koeficijenata linearnog modela se može odrediti korišćenjem početnih uslova, odnosno korišćenjem koordinati čvornih tačaka konačnog elementa. Korišćenjem relacije (A), za čvorne tačke se može napisati:

$$\{\delta\}_{(k)} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & x_i & y_i \\ & \dots & & & & \dots & \\ 1 & x_j & y_j & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & x_j & y_j \\ & \dots & & & & \dots & \\ 1 & x_m & y_m & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & x_m & y_m \end{bmatrix} \{a\} = [C]_{(k)}\{a\}$$

Rešavanjem ove jednačine po nepoznatim koeficijentima sledi:

$$\{a\} = [C]_{(k)}^{-1}\{\delta\}_{(k)} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} a_i & 0 & a_j & 0 & a_m & 0 \\ b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ c_i & 0 & c_j & 0 & c_m & 0 \\ & \dots & & \dots & & \dots \\ 0 & a_i & 0 & a_j & 0 & a_m \\ 0 & b_i & \vdots & 0 & b_j & \vdots & 0 & b_m \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \end{bmatrix} \{\delta\}_{(k)}, \text{ (B)}$$

gde je sa Δ označena površina trougla, koja se izračunava pomoću sledeće matrice relacije:

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix}$$

a novouvedeni koeficijenti matrice oblika se izračunavaju prema sledećim relacijama:

$$\begin{aligned} a_i &= x_j y_m - x_m y_j & a_j &= x_m y_i - x_i y_m & a_m &= x_i y_j - x_j y_m \\ b_i &= y_i - y_m & b_j &= y_m - y_i & b_m &= y_i - y_j \\ c_i &= -(x_j - x_m) & c_j &= -(x_m - x_i) & c_m &= -(x_i - x_j) = \end{aligned}$$

Uvodjenjem B u A sledi matična funkcija pomeraja:

$$\{f\}_{(k)} = [IN_i \quad IN_j \quad IN_m]\{\delta\}_{(k)}, \text{ (C)}$$

gde je:

$$N_r = \frac{1}{2\Delta} (a_r + b_r x + c_r y), \quad (r = i, j, m)$$

a I predstavlja jediničnu matricu drugog reda.

Jednačinom C je određen pomeraj proizvoljno izabrane tačke p konačnog elementa (k) u funkciju pomeraja čvorova i parametara geometrije konačnog elementa (oblik KE).

II Deformacije

Deformacije u bilo kojoj tački trougla sastoje se iz tri komponente:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Primenom funkcije pomeraja C sledi:

$$\{\varepsilon\} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_m & b_m \end{bmatrix} \{\delta\}_{(k)} = [B]\{\delta\}_{(k)} = [B_i \ B_j \ B_m]\{\delta\}_{(k)}, \quad (D)$$

pri čemu su uvedene podmatrice definisane sa:

$$[B_r] = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_r & 0 \\ 0 & c_r \\ c_r & b_r \end{bmatrix}, \quad r = (i, j, m)$$

III Naponi

Napon u bilo kojoj tački trougla sastoje se iz tri komponente:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [D]\{\varepsilon\}$$

gde je sa $[D]$ označena matrica elastičnosti koja glasi:

$$[D] = \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Uvodjenjem relacije za deformaciju konačnog elementa u funkciji pomeraja njegovih čvorova, sledi:

$$\{\sigma\} = [D][B]\{\delta\}_{(k)}$$

IV Matrica krutosti

U opštem slučaju, matrica krutosti konačnog elementa (k) izvodi se sledećom opštom jednačinom:

$$[K]_{(k)} = \int_A [B]^T [D][B] t dA$$

pri čemu je sa t označena debljina poprečnog preseka konačnog elementa. Kada je debljina konstantna, integral se svodi na sledeći oblik:

$$[K]_{(k)} = [B]^T [D][B] t \Delta$$

pri čemu ukupna matrica krutosti konačnog elementa ima sledeću strukturu:

$$[K]_{(k)} = \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} & K_{im} \\ K_{ji} & K_{jj} & K_{jm} \\ K_{mi} & K_{mj} & K_{mm} \end{bmatrix}$$

a njene podmatrice drugog reda se izračunavaju preko:

$$[K_{rs}]_{(k)} = [B_r]^T [D] [B_s] t \Delta, \quad r, s = i, j, m$$

odakle se, smenom podmatrica elastičnosti, dolazi do konačne relacije koja određuje podmatrice krutosti ravanskog konačnog elementa u obliku trougla:

$$[K_{rs}]_{(k)} = \frac{Et}{4\Delta(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} b_r b_s + \frac{1-\nu}{2} c_r c_s & \nu b_r c_s + \frac{1-\nu}{2} c_r b_s \\ \nu c_r b_s + \frac{1-\nu}{2} b_r c & c_r c_s + \frac{1-\nu}{2} b_r b_s \end{bmatrix}, \quad r, s = i, j, m$$

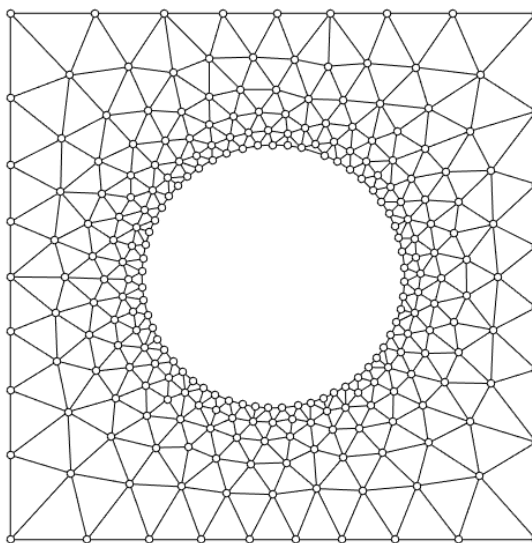
Diskretizacija

Postavka konačnog elementa u obliku trougla otvara vrlo značajno pitanje diskretizacije, odnosno deljenja kontinualne mehaničke strukture na sastavne elemente u obliku trougla. Diskretizacija utiče na tačnost izračunavanja i matematičku kompleksnost. Zato je pitanje diskretizacije vrlo značajno. Generalno, diskretizaciju je moguće uraditi uniformno, sa konačnim elementima jednakih, ili vrlo sličnih dimenzija. Međutim, taj pristup nije optimalan. Optimalna diskretizacija je bez izuzetka neuniformna. Ona treba da prati geometrijske varijacije, posebno prisustvo detalja, i očekivanu raspodelu napona. Tamo gde se pojavljuju sitniji detalji i nagli prelazi, potrebno je koristiti finiju diskretizaciju. Nasuprot tome, u delovima strukture u kojima se očekuje uniformna naponska slika, treba koristiti grublju diskretizaciju, odnosno raditi sa konačnim elementima relativno velikih dimenzija.

Nezavisno od prethodnog, diskretizacija sama po sebi predstavlja veliki praktični problem, koji po pravilu izlazi izvan realnih okvira ručnog rada, odnosno papira i olovke, čak i kod vrlo jednostavnih zadataka. Zato se diskretizacija sprovodi automatski, korišćenjem specijalizovanih algoritama za ovu namenu (standardno, polazi se od Voronoi i Delaunay/Delone algoritama, pa zatim ide ka složenijim; Борис Николаевич Делонé je bio ruski matematičar, poreklom iz Francuske, koji se bavio istraživanjima u oblasti algebre i geometrije).

Problem diskretizacije nije samo svojstven metodi konačnih elemenata, on ima mnogo širu primenu, a jedna od najrasprostranjenijih je u oblasti kompjuterske grafike.

Tema diskretizacije kontinualnih ravanskih i prostornih struktura je vrlo kompleksna i u svemu izlazi izvan okvira ovog kursa. Ipak, da bi se ona približila slušaocima ovog kursa, dalje se navodi primer problema diskretizacije kvadratne ploče sa središnjim kružnim otvorom. Diskretizacija je sprovedena korišćenjem MatLab razvojnog okruženja u kojem je primenjen algoritam konformne ravanske diskretizacije na bazi Delaunay metode triangulacije i uz primenu odgovarajućeg optimizacionog algoritma. Postupak je iterativan i sprovodi se za uslov fine diskretizacije ivične zone središnjeg kružnog otvora. Rešenje prikazano na slici 17 sastoji se iz 253 čvora i 416 konačnih elemenata u obliku trougla. Uočava se da je diskretizacija izrazito neuniformna, da je konformna i da idealno prati konture objekta koji se diskretizuje. Pošto je fokus diskretizacije stavljen na graničnu liniju unutrašnjeg otvora, na njoj se pojavljuje najfinija diskretizacija, koja postepeno smanjuje gustinu kako se udaljava od te zone. Takođe, navedeni primer prikazuje kako se mreža prilagođava graničnim konturama, postepeno prelazeći sa kružnog na kvadratni oblik (metoda napredujuće frontalne linije). Sasvim je jasno da već kod ovako jednostavnog zadatka, primena računara predstavlja jedinu realnu opciju.



Slika 17

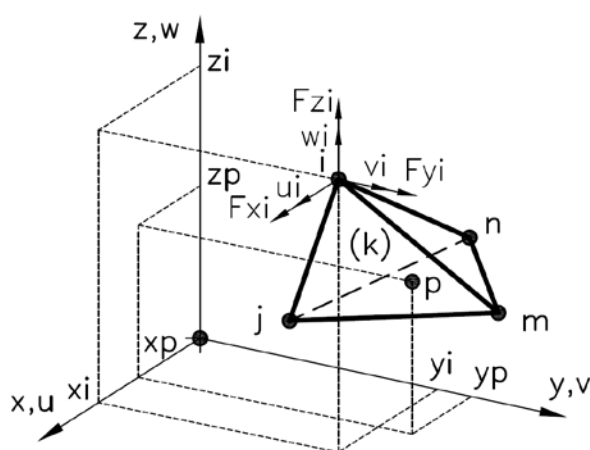
Treba primetiti da mreža na slici 17 nije simetrična iako je objekat koji se diskretizuje simetrična. To je posledica nesavršenosti optimizacionog algoritma.

Savremeni CAD sistemi sa integrisanim MKE modulom imaju sopstvene module za diskretizaciju, takozvane generatore mreže (*mesh generators*), koji se direktno naslanjaju na CAD modeler i koji u sklopu diskretizacije izvode operacije numeracije čvorova i konačnih elemenata, zatim renumeraciju čvorova kako bi se umanjila računaska složenost (dodeljivanje indeksa čvorovima ne sme da bude vodjeno slučajnim izborom), i na kraju se ulazi u postupak formiranja matrice krutosti modelirane strukture i izračunavanje pomeraja i napona za zadati vektor oslonih tačaka i vektor spoljašnjeg opterećenja.

Konačni elemenat u obliku tetraedra

Prelazak na trodimenzione modele uvodi nas u svet takozvanih zapreminskih konačnih elemenata. Najjednostavniji među njima je konačni elemenat u obliku tetraedra.

Na slici 18 prikazan je konačni elemenat u obliku tetraedra. Konačni elemenat se sastoji iz četiri čvora (i, j, k, n), koji se označavaju u smeru suprotnom od kretanja kazaljke na satu. Ova četiri čvora formiraju četiri bočne stranice u obliku trougla. Kao i u slučaju ravanskih, svaki čvor konačnog elementa u obliku tetraedra ima pomeraj duž koordinatnih osa lokalnog koordinatnog sistema (u, v, w) i opterećen je spoljašnjim silama u pravcu koordinatnih osa (F_x, F_y, F_z).



Slika 18

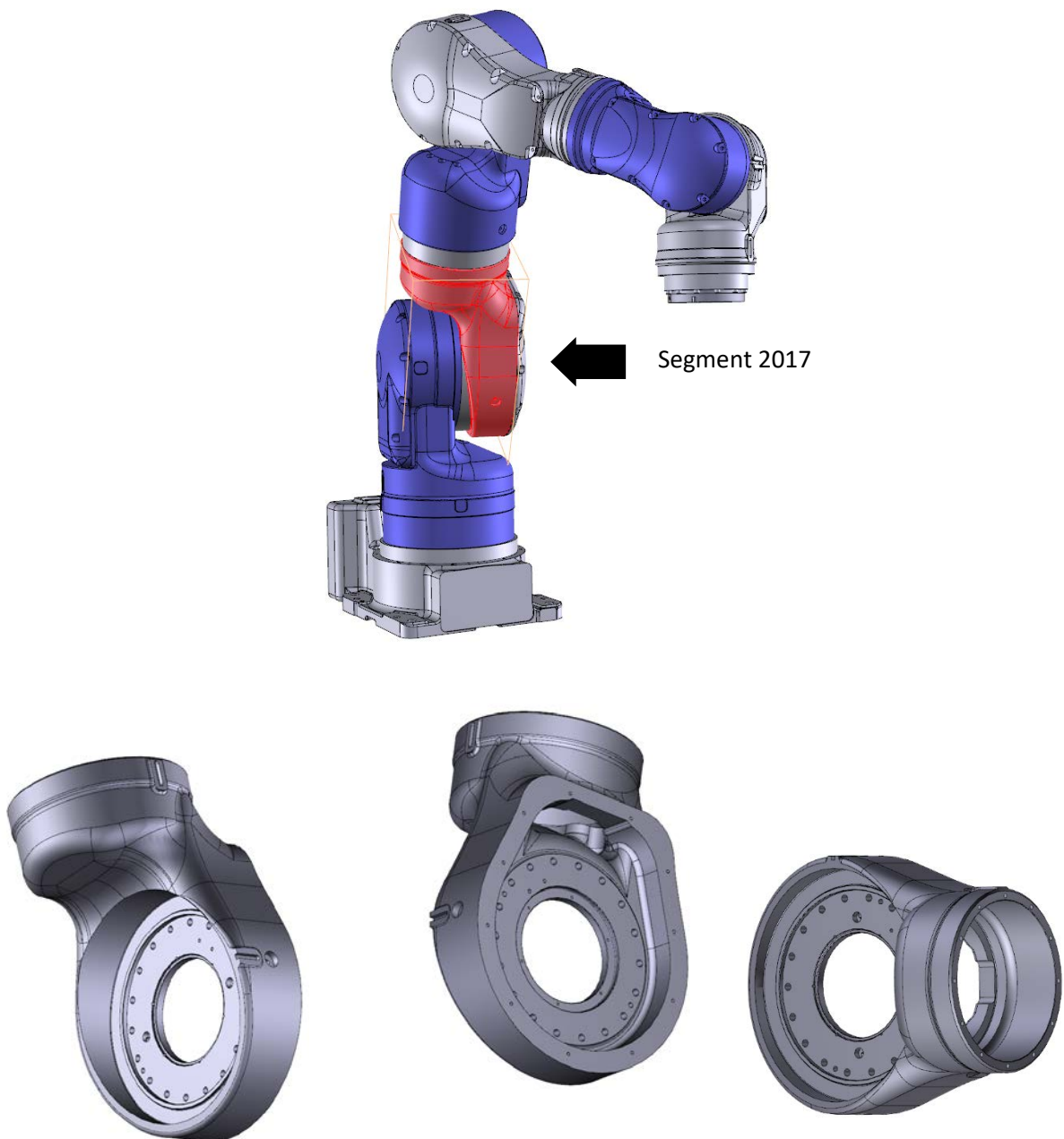
Modeliranje konačnog elementa se izvodi na identičan način kao i u slučaju konačnog elementa u obliku trougla. Prvo se definišu vektor pomeraja, vektor spoljašnjeg opterećenja i vektori koordinata čvorova. Zatim se izvodi funkcija pomeraja. Na osnovu funkcije pomeraja izvode se matrične jednačine deformacija i napona, a odatle formira i matrica krutosti, koja se sastoji iz 4 podmatrice trećeg reda, odnosno ima dimenziju 12×12 . Zbog fizičke obimnosti, izvodjenje prethodno pomenutih jednačina i matrice krutosti se ovde ne sprovodi. Razlog je i to što ručni rad sa ovim konačnim elementom nije realno izvodljiv i podrazumeva primenu računara, bez izuzetka.

Savremeni CAD modeleri koji u sebi imaju modul za proračun struktura pomoću konačnih elemenata, po pravilu rade sa konačnim elementima u obliku tetraedra.

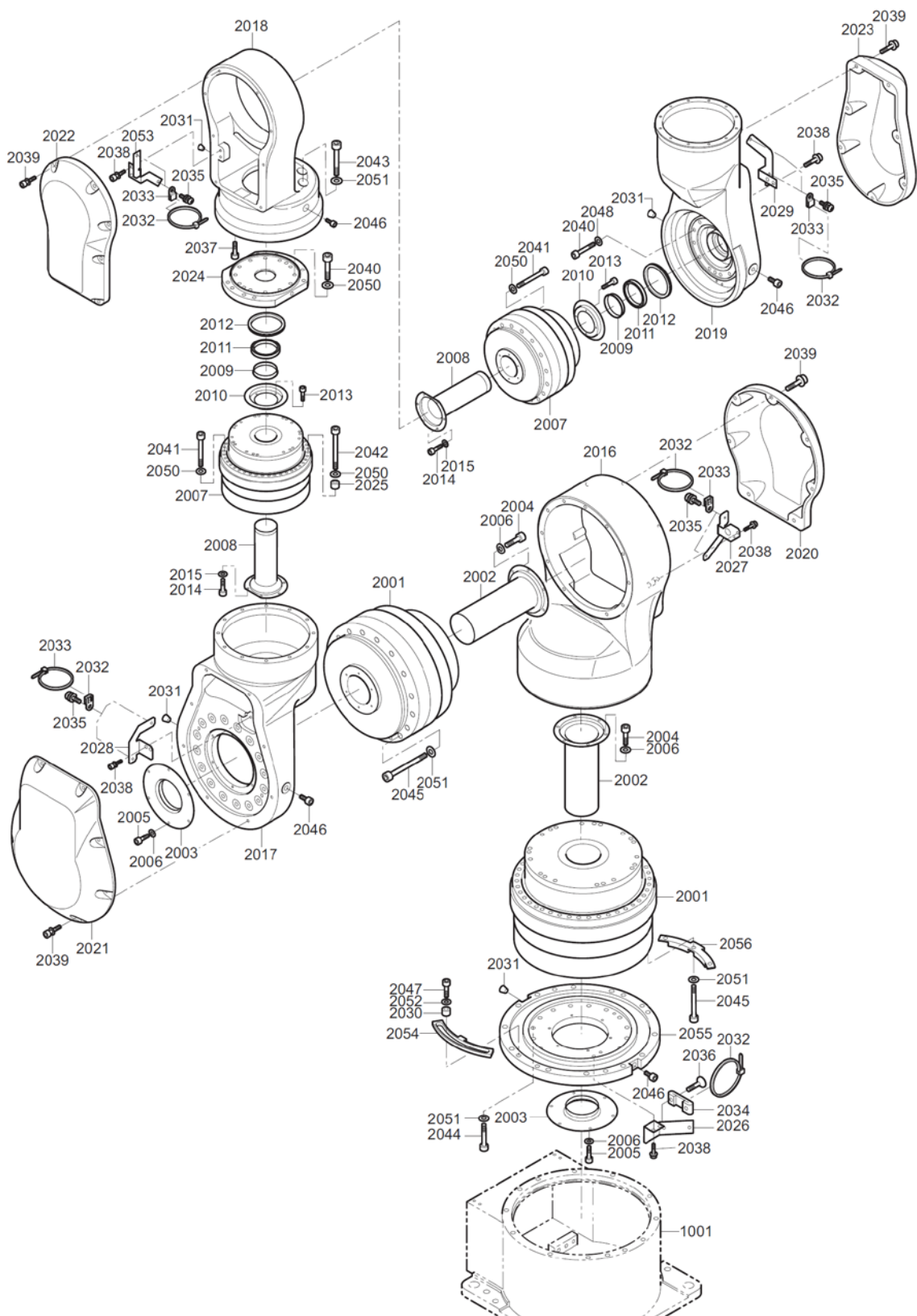
Primer

U cilju ilustracije rada sa konačnim elementima u obliku tetraedra dalje se navodi primer elastostatičkog proračuna jednog segmenta antropomornog robota Yaskawa SIA10F kojim raspolaže Laboratorija za kibernetiku i mehatronske sisteme CMSysLab (slika 18).

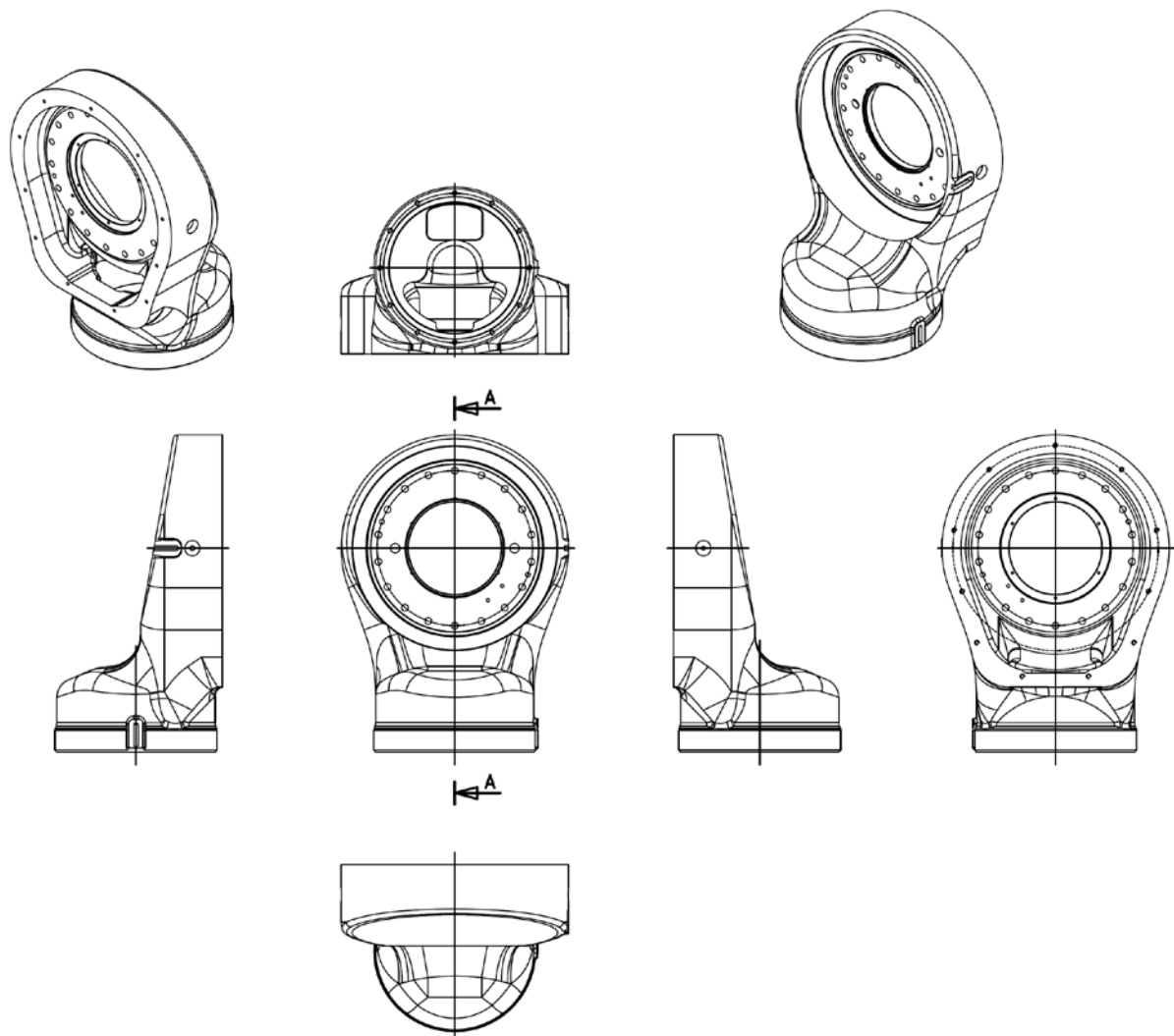
Konkretno razmatra se segment 2, koji povezuje modul zgloba drugog i trećeg stepena slobode, pozicija 2017 na slici 19. Na ovaj segment se ugradjuju dva reduktora velikog prenosnog odnosa, pozicija 2001 i pozicija 2007, takodje prikazano na slici 19 na kojoj je dat eksplodirani izometrijski prikaz ruke robota sa svim kinematskim elementima (napomena: zbog modularne gradnje ruke robota, postoji veći broj reduktora 2001 i 2007).



Slika 18



Slika 19



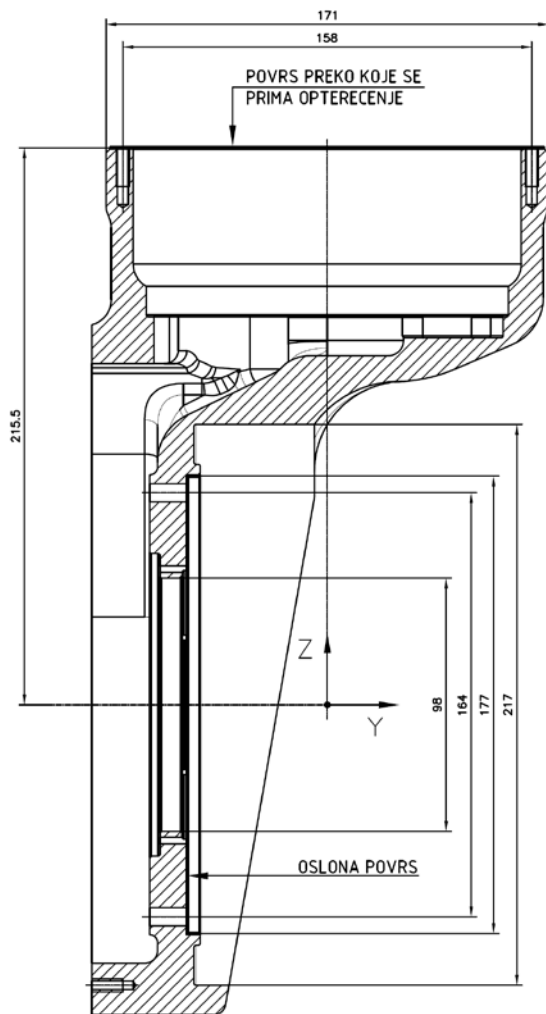
Slika 20

Slika 20 prikazuje osnovne ortogonalne poglede segmenta 2017, koji je izradjen od aluminijuma, tehnologijom livenja.

Bez namere da se ulazi u detaljnu analizu i optimizaciju, na slici 21 se navodi poprečni presek segmenta sa obeleženom površi koje se koristi za oslanjanje (reduktor 2001), kojoj se oduzimaju svi stepeni slobode, i površi preko koje se u elastostatičku strukturu uvodi spoljašnje opterećenje (reduktor 2007).

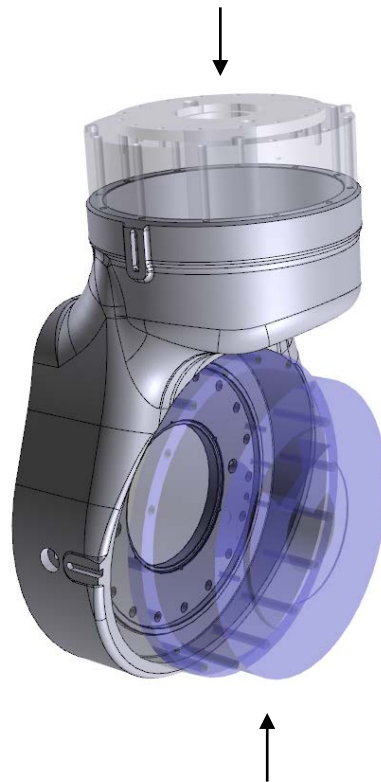
Razmatraju se tri osnovna slučaja opterećenja silom, za koju se uvodi aproksimacija da deluje kao kontinualno opterećenje ravnomerno rasporedjeno po prstenastoj površi prečnika $d=171\text{mm}$, na koju se zavrtnejevima priključuje sklop reduktora koji smatramo krutim telom:

- a) Slučaj opterećenja #1: opterećenje jediničnom silom duž X ose,
- b) Slučaj opterećenja #2: opterećenje jediničnom silom duž Y ose, dva podslučaja b.1) sila deluje u pozitivnom smeru Y ose, i b.2) sila deluje u negativnom smeru Y ose, i
- c) Slučaj opterećenja #3: opterećenje jediničnom silom duž Z ose, dva podslučaja c.1) sila deluje u pozitivnom smeru Z ose, i c.2) sila deluje u negativnom smeru Z ose.



PRESEK A-A

Sklop reduktora/aktuatora 2007, sa integrisanim uležištenjem zgloba i vezom sa narednim segmentom.



Sklop reduktora/aktuatora 2001, sa integrisanim uležištenjem zgloba i vezom sa prethodnim segmentom.

Slika 20

Dalje se navode rezultati proračuna uradjenom u Solidworks CAD modeleru:

Materijal:

Yield strength: $2.75742e+07$ N/m²
 Tensile strength: $6.89356e+07$ N/m²
 Elastic modulus: $6.9e+10$ N/m²
 Poisson's ratio: 0.33
 Mass density: 2700 kg/m³
 Shear modulus: $2.7e+10$ N/m²

Masa i zapremina modela segmenta:

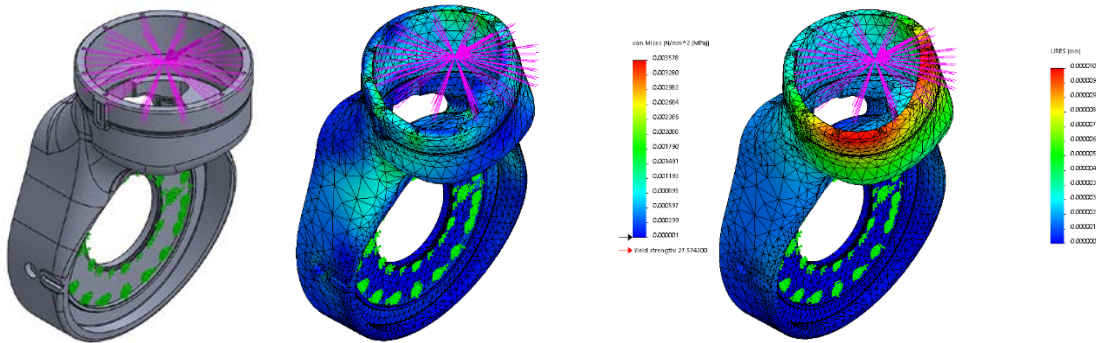
Mass: 5.41839 kg
 Volume: 0.00200686 m³
 Weight: 53.1002 N

Mreža konačnih elemenata:

Mesh type: Solid Mesh
 Mesher Used: Curvature-based mesh
 Maximum element size: 25.2335 mm
 Minimum element size: 5.0467 mm
 Total Nodes: **118264**
 Total Elements: **73739**



Slučaj #1: Opterećenje u pravcu X+ ose

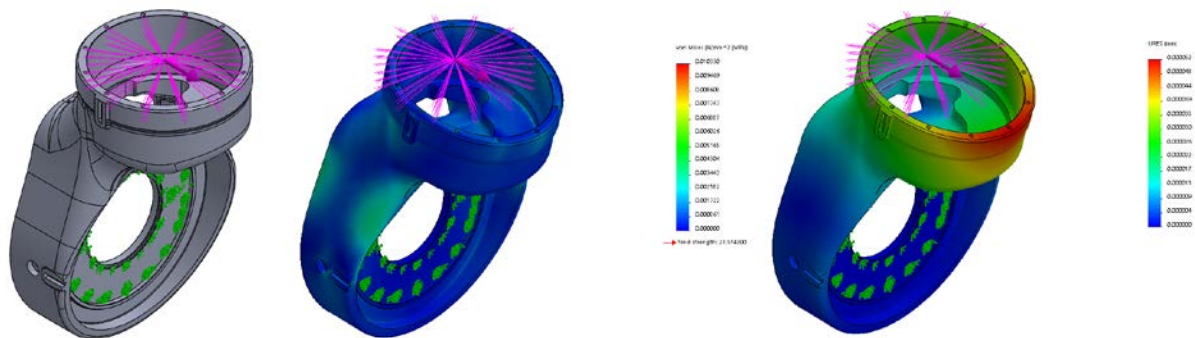


Oslanjanje i opterećenje

Naponi

Pomeraji

Slučaj #2.1: Opterećenje u pravcu Y+ ose

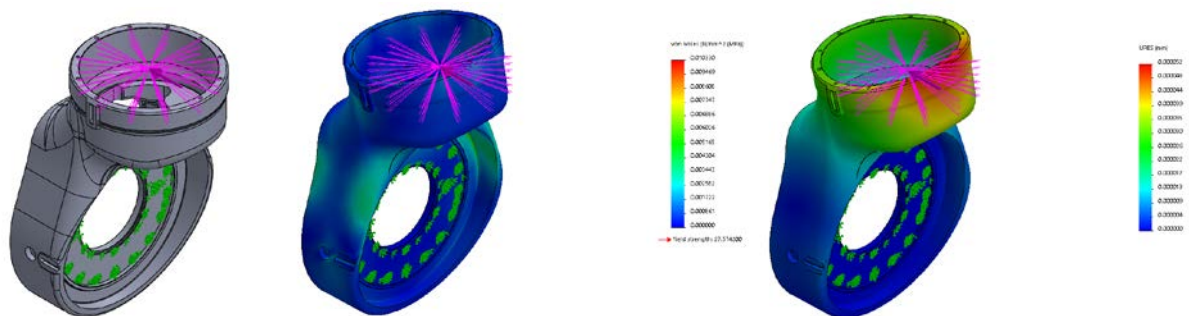


Oslanjanje i opterećenje

Naponi

Pomeraji

Slučaj #2.2: Opterećenje u pravcu Y- ose

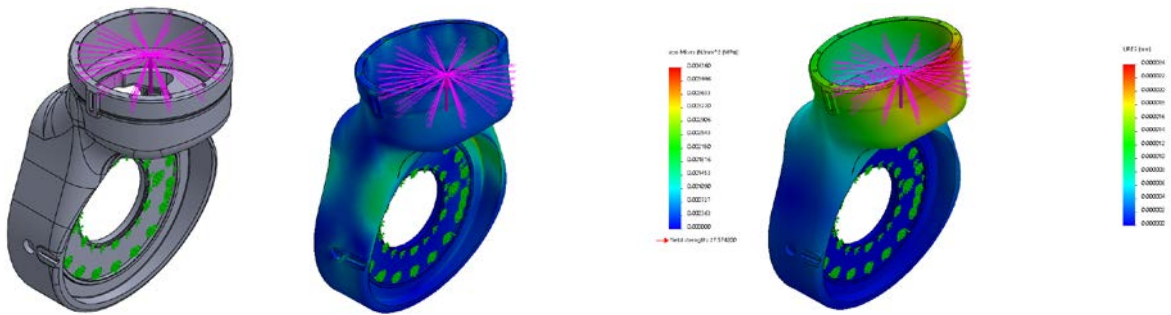


Oslanjanje i opterećenje

Naponi

Pomeraji

Slučaj #3.1: Opterećenje u pravcu Z+ ose

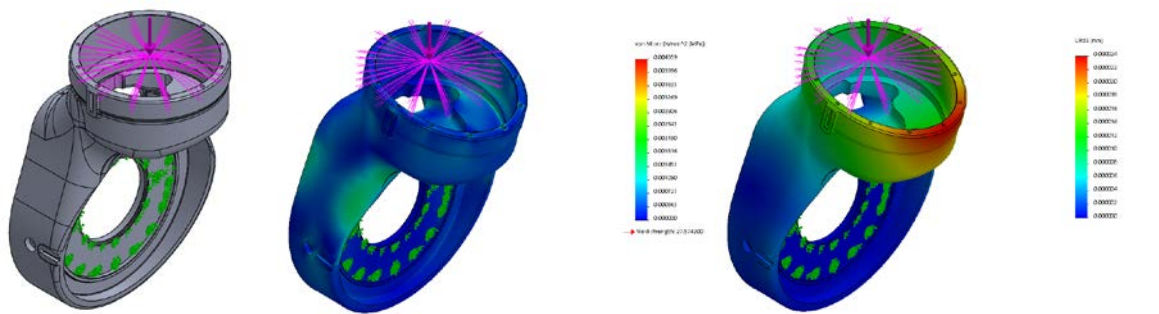


Oslanjanje i opterećenje

Naponi

Pomeraji

Slučaj #3.2: Opterećenje u pravcu Z- ose

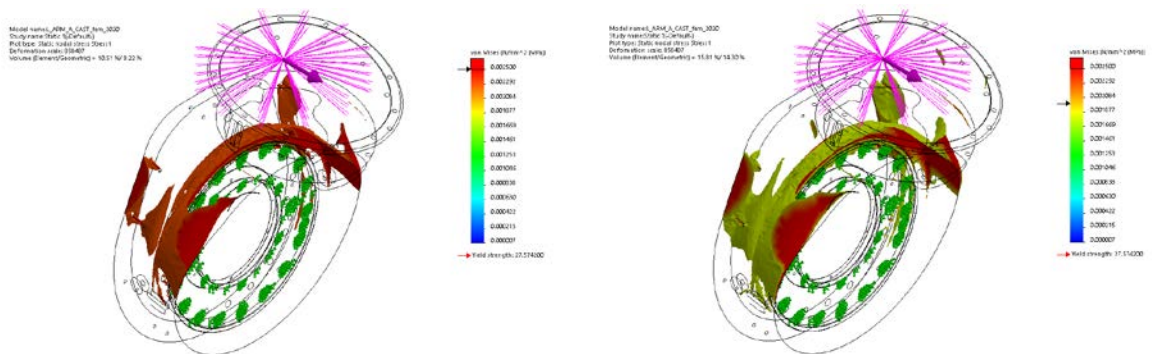


Oslanjanje i opterećenje

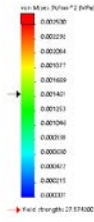
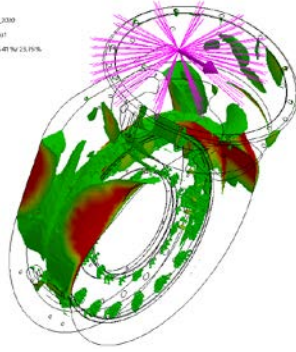
Naponi

Pomeraji

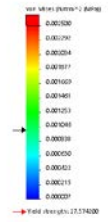
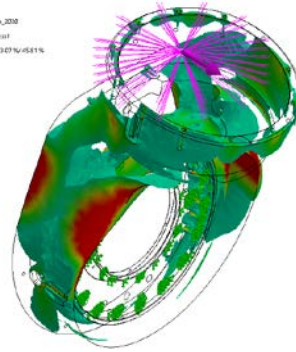
Dalje se navodi kraća analiza distribucije opterećenja u obima angažovanja iskorišćenog materijala u slučaju #2.1: opterećenje u pravcu Y+ ose.



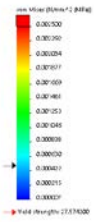
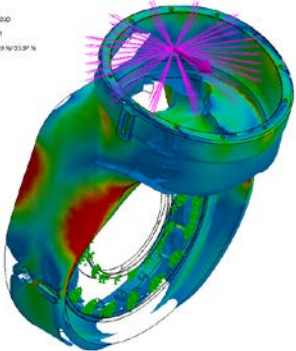
Model name: J2M_A_CAST_Pm_2020
 Study name: J2M_A_CAST_Pm_2020
 Part type: Shell model (thin > 3mm)
 Definition units: SI (SI)
 Volume ElementGeometry = 25.41 %/ 25.19 %



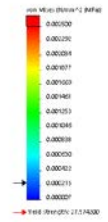
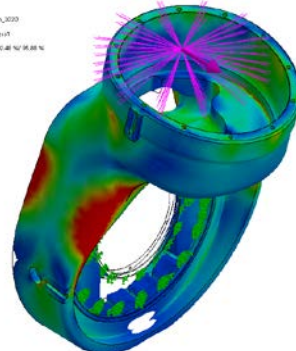
Model name: J2M_A_CAST_Pm_2020
 Study name: J2M_A_CAST_Pm_2020
 Part type: Shell model (thin > 3mm)
 Definition units: SI (SI)
 Volume ElementGeometry = 23.87 %/ 45.11 %



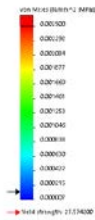
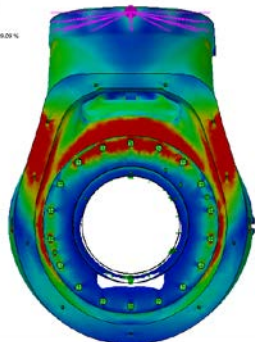
Model name: APV_A_CAST_Pm_2020
 Study name: APV_A_CAST_Pm_2020
 Part type: Shell model (thin > 3mm)
 Definition units: SI (SI)
 Volume ElementGeometry = 75.59 %/ 33.97 %



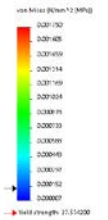
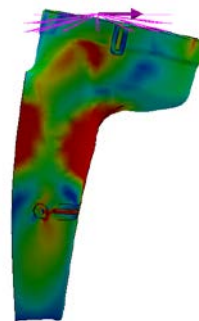
Model name: APV_A_CAST_Pm_2020
 Study name: APV_A_CAST_Pm_2020
 Part type: Shell model (thin > 3mm)
 Definition units: SI (SI)
 Volume ElementGeometry = 91.48 %/ 36.88 %



Model name: APV_A_CAST_Pm_2020
 Study name: APV_A_CAST_Pm_2020
 Part type: Shell model (thin > 3mm)
 Definition units: SI (SI)
 Volume ElementGeometry = 21.50 %/ 98.29 %



Model name: APV_A_CAST_Pm_2020
 Study name: APV_A_CAST_Pm_2020
 Part type: Shell model (thin > 3mm)
 Definition units: SI (SI)
 Volume ElementGeometry = 71.31 %/ 98.29 %

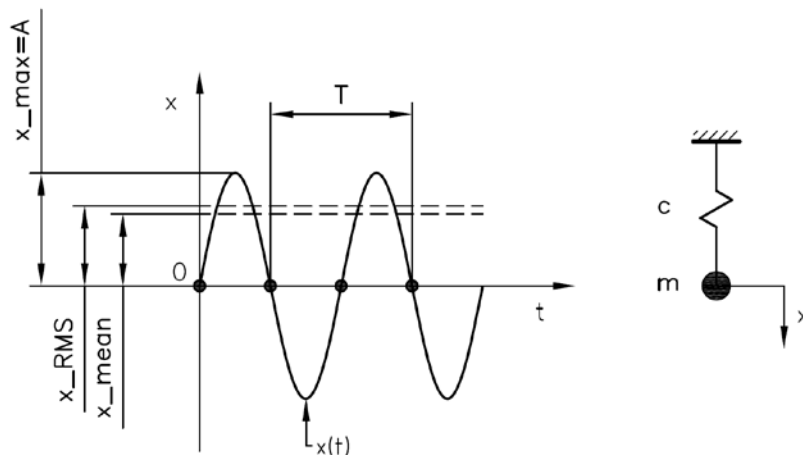


Dinamika obradnih sistema

Obradni sistem je dinamički sistem. Sile rezanja i drugi izvori promenljivog opterećenja koji se pojavljuju u radu obradnog sistema su dinamičke prirode u svojoj osnovi. Sile rezanja su kroz okvir tehnologije mašingradnje posmatrane kao statičke veličine. Zanimarivanje njihove dinamičke prirode bilo je namerno, sa ciljem da se ekstremno složeni fenomeni koji prate proces odvajanja strugotine pojednostave. Ipak, za potpuno razumevanje procesa rezanja i rada jednog obradnog sistema, dinamička priroda svih fenomena koji prate proces rezanje mora da bude uzeta u obzir. Razlog je vrlo jednostavan. Dinamika uvek podrazumeva pomeraj neke strukture. U kontekstu obradnih sistema, taj pomeraj ima sasvim očigledne implikacije na tačnost procesa rezanja. Postoje i drugi aspekti, kao što je habanje alata i tome slično, ali tačnost je od primarnog značaja. Istraživanje dinamičkog ponašanja elastomehaničke strukture obradnog sistema pokazaće da ključna veličina u ovom kontekstu, a to je krutost, ima novi značaj i da je moguće opšti pojam krutosti razdvojiti na statičku krutost i dinamičku krutost.

Osnovni pojmovi, podsećanje

Jednomaseni oscilator bez prigušenja, sastoji se iz koncentrisane mase (m) vezane za oslonac preko opruge krutosti (c). Model je prikazan na slici 1.



Slika 1

Izvodjenjem iz ravnoteže, ovakav sistem počinje da osciluje oko ravnotežnog položaja ($x = 0$) sa periodom T , frekvencijom $f = 1/T$ koja se izražava u Hercima (Hz) i amplitudom A . Perioda T je vremenski interval između dva identična sukcesivna stanja.

Ovakav oscilatorni sistem nazivamo i harmonijskim oscilatorom. On je linearan i kretanje koncentrisane mase u vremenu, odnosno njen pomeraj u odnosu na ravnotežno stanje opisuje se sledećom trigonometrijskom jednačinom koja je funkcija vremena:

$$x = A \sin\left(2\pi \frac{1}{T} t\right) = A \sin(2\pi f t) = A \sin(\omega t)$$

Diferenciranjem jednačine pomeraja po vremenu dobijaju se jednačine koje definišu brzinu i ubrzanje:

$$\frac{d}{dt}x = \dot{x} = A\omega\cos(\omega t)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}x = \ddot{x} = -A\omega^2\sin(\omega t)$$

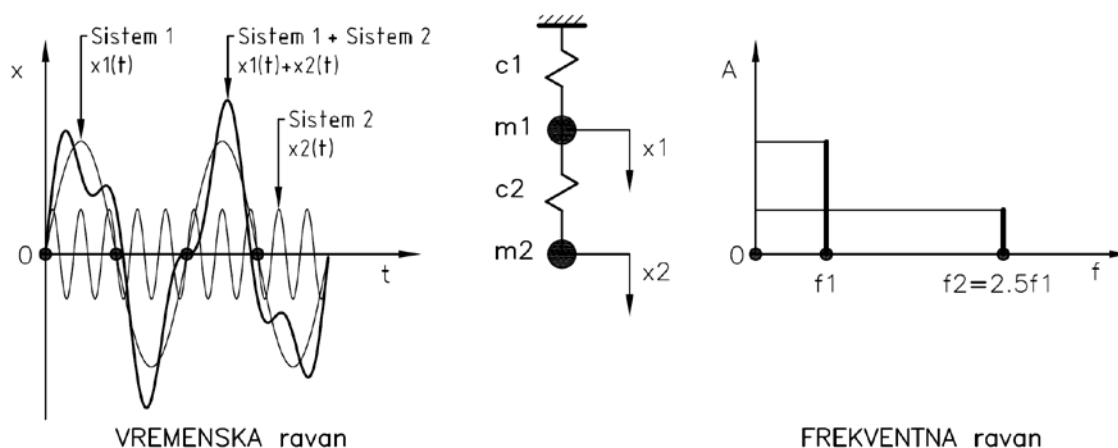
U prethodno navedenim jednačinama, frekvencija je izražena u takozvanoj kružnoj frekvenciji, (ω) čija je jedinica (rad/s). U praksi, pomeraj se meri beskontaktnim senzorom. Brzina takodje. Ubrzanje se meri akcelerometrom i sa aspekta identifikacija i analiza ove vrste pojava kod obradnih sistema ima poseban značaj, praktično dominantna tehnologija.

Srednja aritmetička vrednost oscilacija, kao i srednja kvadratna (RMS) vrednost oscilacija, definisane su sledećim relacijama:

$$x_{mean} = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)| dt = 0.637A$$

$$x_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x(t)^2 dt} = \frac{\sqrt{2}}{2} A = 0.707A$$

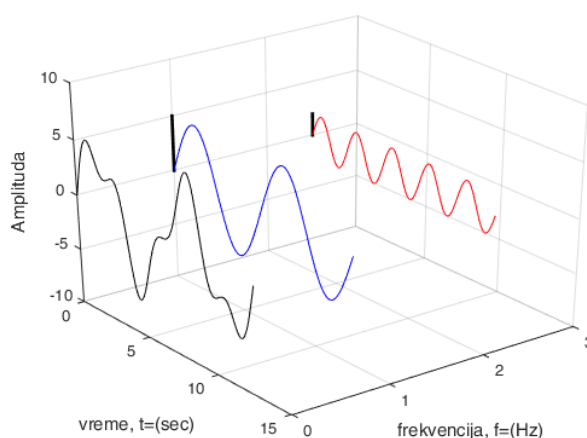
Jednomaseni harmonijski oscilator je, sa aspekta prakse, specijalni slučaj. U realnosti oscilacije jednog obradnog sistema su mnogo kompleksnije i aproksimativno se mogu posmatrati kao oscilacije složenog sistema sa velikim brojem međusobno spregnutih jednomasenih oscilatora. Oscilacije tih prostih, jednomasenih oscilatora se superponiraju, što vodi ka novom konceptu, konceptu neharmonijskog oscilatora. Ovaj kontekst se ilustruje primerom oscilatora sa dve mase, kao što je prikazano na slici 2.



Slika 2

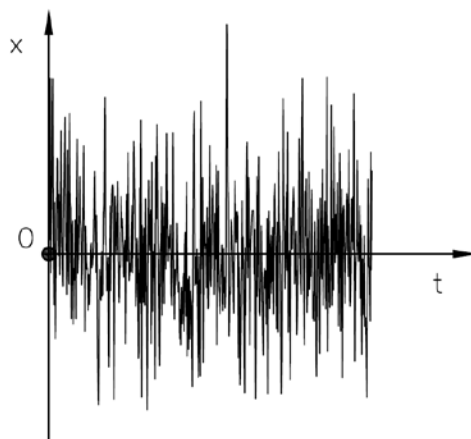
Moguće je uočiti kako se superpozicijom dve harmonijske oscilacije, čiste sinusoide, generiše jedan aperiodični signal, gotovo haotičnog oblika kretanja. Povećanjem broja jednomasenih oscilatora dolazi se do vrlo složenih oblika oscilovanja. Ipak, superpozicija linearnih sistema uvek vodi ka linearnom determinističkom sistemu, koji može da se precizno modelira i čije je ponašanje prediktivno, bez obzira na to kakvu kompleksnost u dinamičkom ponašanju on ostvaruje. Dalje, u ovom slučaju vremenski zapis na kojem se prikazuje rezultatni pomeraj posmatrane tačke u vremenu, a koji se prikazuje u takozvanoj

vremenskoj ravni, može se prevesti u frekventni domen, u kojem se dinamička svojstva razmatranog sistema posmatraju u frekventnoj ravni, određenom koordinatnim sistemom koji čine frekventna osa i osa na kojoj se prikazuju amplitude oscilovanja na pojedinim frekvencijama. Ovim se oslobadjamo vremena. Prelaz iz vremenskog u frekventni domen omogućava jednostavniju analizu i bolje razumevanje kompozicije dinamičkog sistema, odnosno dinamike neke složene elastomehaničke strukture. Na slici 3 prikazan je prostorni dijagram koji objedinjuje vremensku i frekventnu ravan. Plavom bojom prikazano je kretanje mase prvog prostog oscilatora, crvenom bojom prikazano je kretanje mase drugog prostog oscilatora, a njihovo superponirano kretanje prikazano je u vremenskoj ravni linijom crne boje. Ortogonalno na vremensku ravan naslonjena je frekventna ravan i ona prikazuje dve frekvencije na kojima osciluju prvi i drugi oscilator, kao i amplitudu tih oscilacija. Postoje posebne tehnike koje sadržaj iz vremenske ravni transformišu u ekvivalentni sadržaj u frekventnoj ravni. To su tehnike Furijeove analize, odnosno dekompozicije složenog vremenskog signala u njegove frekventne komponente, odnosno spektar.



Slika 3

Pored prethodno opisanih neharmonijskih oscilacija postoji i jedna posebna klasa koju nazivamo stohastičkim oscilacijama. Te oscilacije generišu složeni sistemi nedeterminističkog tipa, odnosno izvori koji sadrže slučajne procese, koji se ne mogu opisati nikakvim diferencijalnim jednačinama, već samo mogu da se karakterišu stohastičkim parametrima. Konkretno, stanje sistema u nekom narednom trenutku, bez obzira na to što poznamo njegovu kompletnu istoriju, ne može se precizno odrediti, već se samo može izraziti verovatnoća njegovog pojavljivanja.



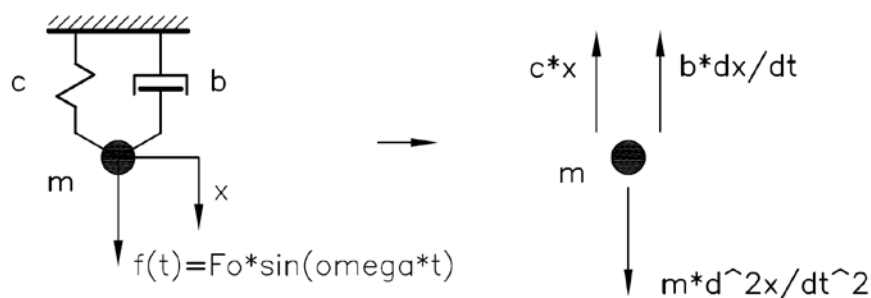
Slika 4

Spektar stohastičkih signala je kontinualan, odnosno beskonačno bogat komponentama. U zavisnosti od profila spektra razlikujemo različite vrste stohastičkih sistema. Tako na primer, imamo sisteme koji generišu isti intenzitet signala na svim frekvencijama, odnosno imaju uniformni spektar (takozvani beli šum), ili signale koji potiču od procesa koje karakterišemo normalnom, odnosno Gausovom raspodelom, $N = p(\mu, \sigma)$, koja je određena sa dva parametra, srednjom vrednošću i disperzijom, (takozvani obojeni šum).

Realni sistemi su uvek kombinacija determinističkog i nedeterminističkog sistema.

Analitički model jednomasenog oscilatora

Polazimo od opšteg modela jednomasenog oscilatora koji obuhvata inercijalnu komponentu, disipativnu komponentu, elastičnu komponentu i spoljašnju pobudu, što nas vodi ka slučaju oscilatornog prigušenog sistema sa spoljašnjom pobudom (prinudne, prigušene oscilacije). Model je prikazan na slici 5.



Slika 5.

Primenom drugog Njutnovog zakona sledi:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = f(t) - cx - b \frac{dx}{dt}$$

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = f(t) = F_0 \sin(\omega t)$$

pri čemu je sopstvena, odnosno prirodna frekvencija ovog sistema određena sledećom relacijom:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$$

a kritično prigušenje:

$$b_k = 2m \sqrt{\frac{c}{m}} = 2m\omega_0$$

Obratiti pažnju na činjenicu da prigušenje ne utiče na vrednost sopstvene frekvencije. Sopstvena frekvencija je određena samo elastičnim i masenim karakteristikama noseće strukture. Amplituda oscilacija elastoviskoznog sistem određena je sledećom relacijom:

$$A = \frac{\frac{F_0}{c}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2 \frac{b}{b_k} \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

pri čemu je $F_0/c = x_{st}$. Statički pomeraj x_{st} određen je amplitudom dinamičke pobudne sile, F_0 . Fazni pomeraj oscilacija je definisan sledećom relacijom:

$$\tan \varphi = -\frac{2 \frac{b}{b_k} \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

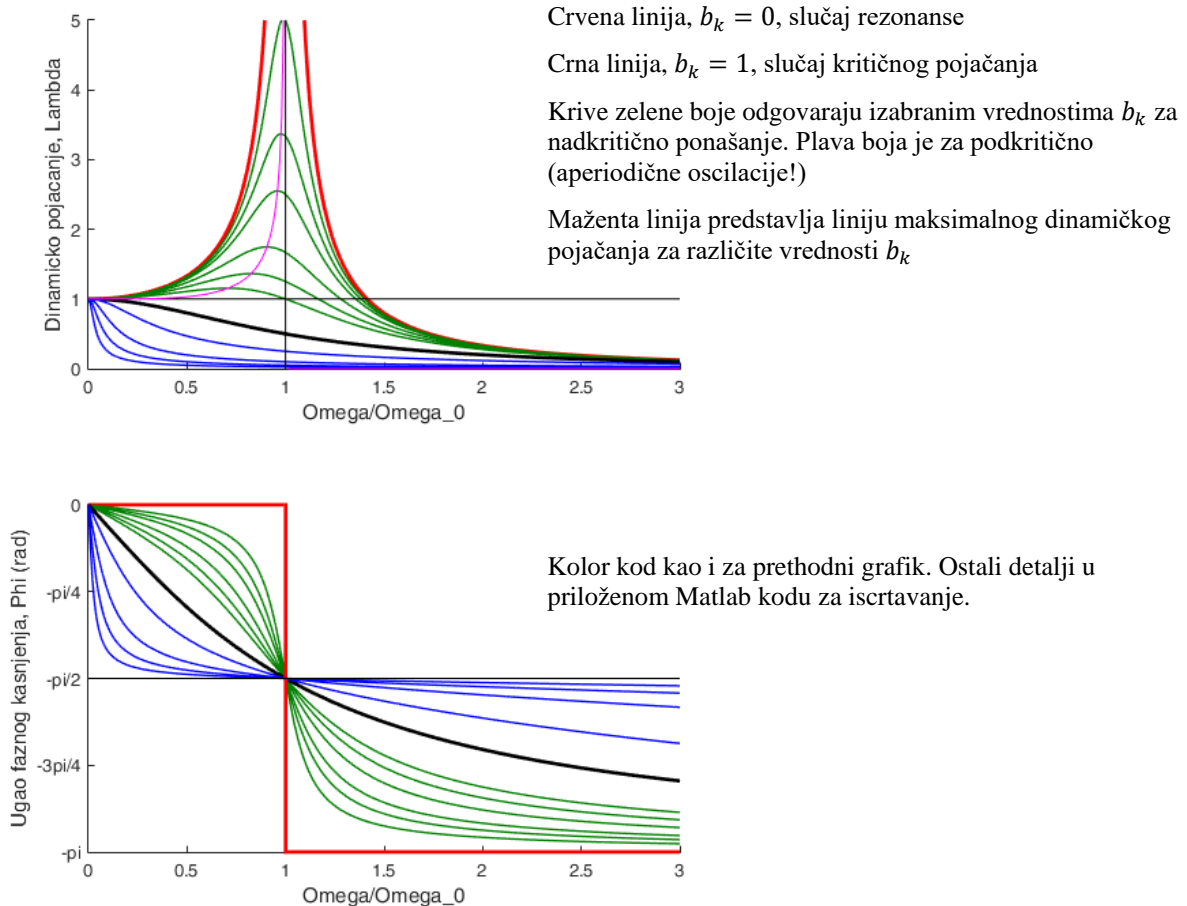
Jednačina kretanja ovog sistema sada glasi:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi)$$

Faktor dinamičkog pojačanja oscilacija, odnosno odnos amplitude dinamičkih oscilacija A i statičkog pomeraja $x_{st} = F_0/c$ određen je sledećom relacijom:

$$\lambda = \frac{A}{x_{st}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2})^2 + (2 \frac{b}{b_k} \frac{\omega}{\omega_0})^2}}$$

Grafički prikaz faktora dinamičkog pojačanja u funkciji relativnog odnosa sopstvene frekvencije i frekvencije spoljašnje pobude naveden je na slici 6. Takođe, na slici 6 je prikazan i njemu pripadajući dijagram ugla faznog kašnjenja.



Slika 6.

Dinamička krutost sistema, koja je određena parametrima dinamičkog sistema i frekvencijom spoljašnje pobude ω :

$$c_{din} = \frac{F}{A} = \frac{F}{x_{st}} \frac{1}{\lambda} = f(\omega)$$

Razumevanje fizičkog ponašanja jednomasenog oscilatora prikazanog dijagramima dinamičkog pojačanja amplitude i faznog kašnjenja je od suštinskog značaja. Horizontalna osa na oba dijagrama iskazuje odnos ω/ω_o odnosno odnos sopstvene frekvencije dinamičkog sistema i frekvencije spoljašnje pobude (frekvencija pobude normirana sopstvenom frekvencijom!). Vertikalna osa pokazuje odziv dinamičkog sistema na spoljašnju dinamičku pobudu i to njegovu relativnu amplitudu, odnosno amplitudu normiranu sa statičkim pomerajem koji izaziva amplituda spoljašnje pobude F_o .

Na oba dijagrama treba uočiti na horizontalnoj osi jediničnu vrednost, odnosno vrednost na kojoj je frekvencija spoljašnje pobude jednaka sopstvenoj frekvenciji sistema. Ova karakteristična vrednost odgovara stanju sistema koji nazivamo rezonansom. Dakle, za rezonansu važi da je $\omega/\omega_o = 1$. Ta vrednost deli oba dijagrama na levu i desnu polovinu, u kojima prepoznamo suštinski različito ponašanje. Leva strana oba dijagrama prikazuje podkritično ponašanje dinamičkog sistema, dok desna strana prikazuje nadkritično stanje. Prelazna vrednost, $\omega/\omega_o = 1$ karakteriše se dramatičnom promenom tipa diskontinuiteta i predstavlja jedan od 4 karakteristična stanja oscilatornog sistema posmatrano po horizontalnoj, frekventnoj osi (statičko, podkritično, rezonansa i nadkritično). Za potpuno razumevanje stanja rezonanse treba uzeti u obzir stepen prigušenja sistema. U slučaju nultog prigušenja dinamičkog sistema, faktor dinamičkog pojačanja oscilacija odlazi u beskonačnost, sistem dobija maksimalnu amplitudu i teorijski, a i praktično, dolazi do njegovog razaranja zbog akumulacije mehaničke energije tokom vremena. Paralelno, pripadajući fazni ugao ima diskontinuitet, odnosno odskočno menja vrednost za $-\pi$ radijana, odnosno koncentrisana masa koja je sledila smer pobudne sile u podkritičnom domenu, u nadkritičnom menja smer za $-\pi$ radijana i suprotstavlja se dejstvu spoljašnje pobude. Upravo ova činjenica, odnosno promena smera kretanja koncentrisane mase u odnosu na smer spoljašnje pobude objašnjava drastični pad dinamičkog pojačanja amplitude, kada faktički dolazi do njenog prigušenja, jer faktor dinamičkog pojačanja postaje manji od jedinice, odnosno važi: $\lambda < 1$ ukoliko je sistem dovoljno daleko od rezonanse (uvek ako je $\omega/\omega_o > \sqrt{2}$). Treba uočiti da $\lambda > 1$ predstavlja dinamičko pojačanje oscilacija, dok $\lambda < 1$ označava dinamičko slabljenje, ili dinamičko prigušenje, kada amplituda oscilovanja postaje manja od statičkog pomeraja x_{st} . Statička vrednost amplitude je određena sa $\omega/\omega_o = 0$, dakle u koordinatnom početku dinamičke ose sistema ω/ω_o sistem se transformiše u statički (specijalni slučaj na ovom dijagramu!). Lokacija ekstremuma za dinamičko pojačanje može se analitički dobiti diferenciranjem izraza dinamičkog pojačanja po ω/ω_o odakle sledi:

$$\lambda_{max} = \frac{d}{d(\omega/\omega_o)} \lambda = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_o^2})^4}}$$

Vrednost koeficijenta prigušenja takodje ima značajan uticaj na karakter oscilacija. Ukoliko je njegova vrednost manja od kritične, odnosno ako je $b < b_k$ oscilacije sistema su periodične. U slučaju da je $b > b_k$ onda oscilacije sistema postaju aperiodične.

Matlab programski kod kojim je iscrtan grafik dinamičkog pojačanja i ugla kašnjenja:

```
% =====
% grafik dinamičkog pojačanja oscilacija i faznog kašnjenja
figure1 = figure(3)
subplot2 = subplot(2,1,2, 'Parent',figure1, 'YTickLabel', {'-pi','-3pi/4','-pi/2','-pi/4','0'},...
'YTick', [-3.141592 -2.3562 -1.5708 -0.7854 0]);
```

```

omega = 0:0.01:5; %vektor omega/omeaga_0
bk=[0, 0.5, 0.1, 0.15 0.2, 0.3, 0.4 0.5 1 2 5 10 20]; % izabrane vrednosti kritičnog prigušenja
for i=1:length(bk)
Lambda(i,:) = 1./sqrt((1-omega.^2).^2 + (2.*bk(i).*omega).^2); %faktor dinamičkog pojačanja
subplot(2,1,1), hold on
    if bk(i)==0
        plot(omega, Lambda(i,:), 'r', 'LineWidth', 2)
    elseif bk(i)==1
        plot(omega, Lambda(i,:), 'k', 'LineWidth', 2)
    else
        if bk(i)>1
            plot(omega, Lambda(i,:), 'b', 'LineWidth', 1)
        else
            plot(omega, Lambda(i,:), 'Color',[0 0.5 0], 'LineWidth', 1)
        end
    end
end
xlabel('Omega/Omega_0','Interpreter', 'none')
ylabel('Dinamičko pojačanje, Lambda')
xlim([0 3]),ylim([0 5]);

Fi(i,:)=atan(-(2.*bk(i).*omega)./(1-omega.^2)); %ugao faznog kašnjenja
for j=1:length(omega) %korekcija znaka atan funkcije
    if omega(j)>1
        Fi(i,j)=Fi(i,j)-pi;
    end
end
subplot(2,1,2), hold on
if bk(i)==0
    plot(omega, Fi(i,:), 'r', 'LineWidth', 2)
elseif bk(i)==1
    plot(omega, Fi(i,:), 'k', 'LineWidth', 2)
else
    if bk(i)>1
        plot(omega, Fi(i,:), 'b', 'LineWidth', 1)
    else
        plot(omega, Fi(i,:), 'Color',[0 0.5 0], 'LineWidth', 1)
    end
end
end
xlim([0 3]), ylim([-pi 0]);
xlabel('Omega/Omega_0', 'Interpreter', 'none')
ylabel('Ugao faznog kašnjenja, Phi (rad)')
%yticks([0 -pi/2 -pi])
end
subplot(2,1,1) % Dodavanje pomoćnih linija
plot([1,1],[0,5], 'k')
plot([0,3],[1,1], 'k')
pik=1./sqrt(1-omega.^4); % kriva maksimuma dinamičkog pojačanja
plot(omega, pik, 'm')
hold off
subplot(2,1,2) % dodavanje pomoćnih linija
plot([1,1],[0,-pi], 'r', 'LineWidth', 2)
plot([0,3],[-pi/2,-pi/2], 'k')
hold off
set(gcf, 'Position', [500 10 560 750]) % pozicioniranje grafika na ekranu
% =====

```

Kod projektovanja obradnih sistema, noseću strukturu treba tako oblikovati da se stanje rezonanse nikada na pojavi. Takodje noseća struktura treba da ima što je moguće veći koeficijent prigušenja. Prigušenje ove vrste po pravilu potiče od interkristalnog trenja u materijalu iz kojeg je noseća struktura izradjena. Sivi liv ima značajno veću vrednost interkristalnog trenja u odnosu na čelik. Zbog toga se noseća struktura obranih sistema izradjuje od sivog liva, uvek kada je to moguće (ekonomski i ekološki opravdano).

Matrični oblik Lagranžovih jednačina

Za sistem sa n stepeni slobode važi sledeće:

$$\text{kinetička energija sistema: } E_k = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n m_{i,j} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

$$\text{potencijalna energija sistema: } E_p = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n c_{i,j} q_i q_j$$

što u matričnom obliku glasi:

$$E_k = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T [M] \{\dot{q}\}$$

$$E_p = \frac{1}{2} \{q\}^T [C] \{q\}$$

gde su: $\{q\}$ – vektor generalisanih koordinata, $\{\dot{q}\}$ – vektor generalisanih brzina, $[M]$ matrica masa i inercijalnih momenata i $[C]$ matrica krutosti. Primenom Lagranžovih jednačina drugog reda za slučaj malih oscilacija sistema (primenjuju se trigonometrijske aproksimacije koje analitički model pretvaraju u linearni!):

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} \right\} - \left\{ \frac{\partial E_k}{\partial q_j} \right\} + \left\{ \frac{\partial E_p}{\partial q_j} \right\} = \{Q\}$$

gde se pojedini članovi mogu zapisati kao:

$$\left\{ \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} \right\} = [M] \{\dot{q}\}$$

$$\left\{ \frac{\partial E_p}{\partial q_j} \right\} = [C] \{q\}$$

dolazi se do matričnog sistema linearnih diferencijalnih jednačina drugog reda:

$$[M] \{\ddot{q}\} + [C] \{q\} = \{Q\} \quad \text{Prinudno oscilovanje sistema bez prigušenja (A)}$$

$$[M] \{\ddot{q}\} + [C] \{q\} = \{0\} \quad \text{Slobodno oscilovanje sistema bez prigušenja (B)}$$

Uvodjenjem i treće, disipativne komponente:

$$\Phi = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T [B] \{\dot{q}\}$$

gde je sa $[B]$ označena matrica prigušenja sistema, dolazi se i do trećeg karakterističnog oblika modela dinamičkog ponašanja elastomehaničke strukture:

$$[M] \{\ddot{q}\} + [B] \{\dot{q}\} + [C] \{q\} = \{Q\} \quad \text{Prinudno oscilovanje sistema sa prigušenjem (C)}$$

Analitičko rešavanje dinamičkih jednačina oscilatornog sistema podrazumeva određivanje sopstvenih vrednosti, odnosno sopstvenih frekvencija, i sopstvenih vektora, odnosno oblika oscilovanja. Ovim se ulazi u jednu posebnu oblast elastomehanike koju nazivamo modalnom analizom. Modalna analiza je vrlo bitan alat za izučavanje dinamičkog ponašanja nekog sistema, i na bazi toga, njegove optimizacije u

inženjerskom projektovanju. Ona takodje ima velikog značaja i u eksperimentalnom delu projektnih aktivnosti i takodje, u održavanju.

Ukoliko se krene od jednačine dinamičkog sistema u režimu slobodnih oscilacija, jednačina (B), onda se množenjem sa leve strane sa $[M]^{-1}$ može napisati:

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} = \{0\} \quad / [M]^{-1}$$

$$\{\ddot{q}\} + [M]^{-1}[C]\{\dot{q}\} = \{0\}$$

$$[M]^{-1}[C] = [H]$$

$$\{\ddot{q}\} + [H]\{\dot{q}\} = \{0\}$$

gde je član $[M]^{-1}[C] = [H]$ predstavlja dinamičku matricu sistema koja u sebi nosi sve informacije o dinamici razmatranog sistema sa aspekta modalne analize.

Dalje se može pretpostaviti da postoji neki koordinatni sistem određen skupom koordinata $\{p\}$ u kojem važi:

$$\{\ddot{p}\} + [\Lambda]\{\dot{p}\} = \{0\}$$

gde je sa $[\Lambda]$ označena dijagonalna matrica, odnosno $[\Lambda] = \text{dijag}\{\lambda_1, \lambda_{12}, \dots, \lambda_n\}$. Veza između dve baze, odnosno dva koordinatna sistema je linearna i definisana je sledećom relacijom:

$$\{q\} = [\mu]\{p\}$$

Matrica $[\mu]$ u ovom slučaju predstavlja matricu kojom se polazni koordinatni sistem preslikava u novouvedeni. Smenom ove transformacione relacije u dinamičku jednačinu sistema u režimu slobodnih oscilacija, (B), sledi:

$$[\mu]\{\ddot{p}\} + [H][\mu]\{\dot{p}\} = \{0\} \quad / [\mu]^{-1}$$

$$\{\ddot{p}\} + [\mu]^{-1}[H][\mu]\{\dot{p}\} = \{0\}$$

odakle dalje sledi da je nepoznata dijagonalna matrica $[\Lambda]$ definisana sledećom relacijom:

$$[\Lambda] = [\mu]^{-1}[H][\mu]$$

Ovim transformacijama i prelaskom na dijagonalizovani oblik dinamičke matrice elastomehaničkog sistema, sistem se ortogonalizuje, pa se time vrši njegovo raspredznanje i umesto sistema spregnutih linearnih jednačina, dolazi se do mnogo povoljnijeg oblika za rad, do ekvivalentnog sistema diferencijalnih linearnih jednačina drugog reda koje su međusobno nespregnute, odnosno važi:

$$\ddot{p}_r + \lambda_r p_r = 0, \quad r = 1, 2, \dots, n$$

čije je rešenje identično onom koje je već izvedeno u prethodnim razmatranjima:

$$p_r = A_r \sin(\omega_r + \psi_r)$$

i gde sopstvene vrednosti dinamičke matrice $[\Lambda]$, odnosno njeni dijagonalni elementi imaju fizički smisao kvadrata sopstvene frekvencije:

$$\omega_r^2 = 1/\lambda_r$$

Koordinate $\{p\}$ se nazivaju glavnim koordinatama sistema, a korespondentni oblici oscilovanja glavni oblici oscilovanja.

Treba uočiti da se skup generalisanih koordinata proizvoljno bira. Skup glavnih koordinata je, međutim, jedinstven! To je jedini skup koordinata koje su međusobno ortogonalne. Ortogonalnost znači raspregnutost, što ima poseban značaj za modalnu analizu jer omogućava da se sistemi sa vrlo velikim brojem stepeni slobode matematički dekomponuju na prost skup nespregnutih prostih, jednomasenih oscilatora, čime se dalje omogućava analiza ponašanja sistema za svaku od sopstvenih vrednosti λ_r nezavisno.

Mašinski fakultet Univerziteta u Beogradu

Katedra za proizvodno mašinstvo

Laboratorija za kibernetiku i mehatronske sisteme - CMSysLab

Predmet: Projektovanje obradnih sistema

Predmetni nastavnik: Prof. Petar B. Petrović

Beograd 2020.04.27

Dinamička jednačina konačnog elementa

Dodavanjem inercijalnih atributa, konačni elementi sa mogu efikasno primeniti u modeliranju nosećih struktura obradnih sistema. Specifična inercijalna sila je definisana relacijom:

$$-\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{f\}$$

pri čemu je ρ gustina, a f funkcija pomeraja, koja je razmatrana u statički konačnih elemenata. Analogno, moguće je zapisati i specifičnu silu viskoznog prigušenja, označavajući sa β koeficijent proporcionalnosti:

$$-\beta \frac{\partial}{\partial t} \{f\}$$

Izjednačavajući radove spoljašnjih i unutrašnjih sila, i uzimajući da je $\{f\}_{(k)} = [N]\{\delta\}_{(k)}$ sledi dinamička jednačina konačnog elementa:

$$[m]_{(k)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{\delta\}_{(k)} + [b]_{(k)} \frac{\partial}{\partial t} \{\delta\}_{(k)} + [k]_{(k)} \{\delta\}_{(k)} = \{F(t)\}_{(k)}$$

gde je:

$$\text{inercijalna matrica} \rightarrow [m]_{(k)} = \int_V [N]^T \rho [N] dV$$

$$\text{matrica prigušenja} \rightarrow [b]_{(k)} = \int_V [N]^T \beta [N] dV$$

Šema sastavljanja za skup međusobno spregnutih konačnih elemenata i formiranje inercijalne matrice sistema (matrica masa) i disipativne matrice sistema, analogna je šemi sastavljanja ukupne matrice krutosti koja je razmatrana u okviru statike konačnih elemenata, odnosno važi:

$$[M] = \sum_{(k)} [m_{r,s}]_{(k)}$$

$$[B] = \sum_{(k)} [b_{r,s}]_{(k)}$$

što nas vodi do konačnog oblika:

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [B]\{\dot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = \{F(t)\}$$

Sa $\{\ddot{\delta}\}$ označen je vektor ubrzanja čvornih tačaka, $\{\dot{\delta}\}$ je vektor brzina čvornih tačaka a $\{F(t)\}$ je spoljašnja pobuda koja je funkcija vremena (dinamička pobuda, za razliku od pobude u statičkom domenu).

Matrica mase konačnog elementa

Konačni elemenat u obliku štapa:

$$[m_{r,s}]_{(k)} = \rho A I \int_L N_r N_s dz, \quad (r, s = i, j)$$

ako integral ima vrednost:

$$\int_L N_r N_s dz = \begin{cases} \frac{L^3}{3}, & r = s \\ \frac{L^3}{6}, & r \neq s \end{cases}$$

onda inercijalna matrica glasi:

$$[m]_{(k)} = \begin{bmatrix} m_{i,i} & m_{i,j} \\ m_{j,i} & m_{j,j} \end{bmatrix} = \frac{m_k}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \vdots & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \vdots & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

pri čemu je $m_k = \rho A L$ masa konačnog elementa.

Konačni elemenat u obliku trougla:

$$[m_{r,s}]_{(k)} = \rho t I \int_{\Delta} N_r N_s dx dy, \quad (r, s = i, j, m)$$

pri čemu je sa t označena debljina konačnog elementa a Δ je njegova površina. Analogno slučaju štapa, može se napisati:

ako integral ima vrednost:

$$\int_{\Delta} N_r N_s dx dy = \begin{cases} \frac{1}{6} \Delta, & r = s \\ \frac{1}{12} \Delta, & r \neq s \end{cases}$$

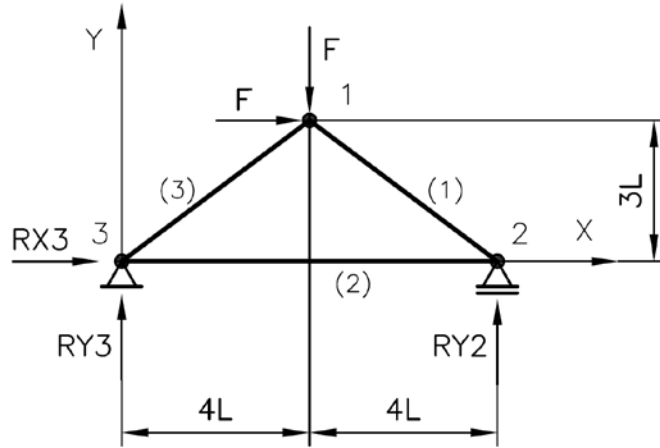
odakle sledi:

$$[m]_{(k)} = \begin{bmatrix} m_{i,i} & m_{i,j} & m_{i,m} \\ m_{j,i} & m_{j,j} & m_{j,m} \\ m_{m,i} & m_{m,j} & m_{m,m} \end{bmatrix} = \frac{m_k}{1} \begin{bmatrix} 2 & 0 & \vdots & 1 & 0 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & 2 & \vdots & 0 & 1 & \vdots & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & \vdots & 2 & 0 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 2 & \vdots & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & \vdots & 1 & 0 & \vdots & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 1 & \vdots & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

pri čemu je $m_k = \rho t \Delta$ masa konačnog elementa.

Primer 1

Za potrebe demonstracije primene metode konačnih elemenata u oblasti dinamike elastomehaničkih struktura, vratićemo se na primer koji je korišćen u okviru statike. U pitanju je struktura koja se sastoji iz tri štapa, povezanih kao što je prikazano na slici 7.



Slika 7

Analogno postupku sastavljanja ukupne matrice krutosti, ukupna matrica masa je određena sledećom relacijom:

$$[M] = \sum_{(k)} [m]_{(k)}, \quad (r, s = 1, 2, 3, \quad k = 1, 2, 3)$$

pa sledi:

$$[M] = \sum_{(k)} [M]_{(k)} = \begin{bmatrix} [m_{11}]_{(1)} + [m_{11}]_{(3)} & [m_{12}]_{(1)} & [m_{13}]_{(3)} \\ [m_{21}]_{(1)} & [m_{22}]_{(1)} + [m_{22}]_{(2)} & [m_{23}]_{(2)} \\ [m_{31}]_{(3)} & [m_{32}]_{(2)} & [m_{33}]_{(2)} + [m_{33}]_{(3)} \end{bmatrix}$$

Podmatrice masa moraju da budu izražene u globalnom koordinatnom sistemu. Ta transformacija je definisana sledećom relacijom:

$$[m_{r,s}]_{(k)} = [T]_{(k)}^T [\tilde{m}_{rs}]_{(k)} [T]_{(k)}$$

Transformacione matrice imaju istu vrednost kao i za slučaj izvodjenja ukupne matrice krutosti, odnosno:

$$[T]_{(1)} = \frac{1}{5L} \begin{bmatrix} (3L - 0) & -(4L - 8L) \\ (4L - 8L) & (3L - 0) \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}_{(1)}$$

$$[T]_{(2)} = \frac{1}{8L} \begin{bmatrix} (0 - 0) & -(0 - 8L) \\ (0 - 8L) & (0 - 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}_{(2)}$$

$$[T]_{(3)} = \frac{1}{5L} \begin{bmatrix} (0 - 3L) & -(0 - 4L) \\ (0 - 4L) & (0 - 3L) \end{bmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}_{(3)}$$

Dalje, primenom ovih transformacionih matrica, vrši se preslikavanje svih podmatrica masa svih konačnih elemenata iz lokalnog u globalni koordinatni sistem:

$$[m_{11}]_{(1)} = [m_{22}]_{(1)} = [T]_{(k)}^T [\tilde{K}_{rs}] [T]_{(k)} =$$

$$= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}_{(1)} \frac{m_1}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}_{(1)} = \frac{m_1}{150} \begin{bmatrix} 32 & -24 \\ -24 & 18 \end{bmatrix}$$

$$[m_{12}]_{(1)} = [m_{21}]_{(1)} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}_{(1)} \frac{m_1}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}_{(1)} = \frac{m_1}{150} \begin{bmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{bmatrix}$$

odakle se dalje ispisuje matrica masa konačnog elementa KE(1) u globalnom koordinatnom sistemu:

$$[m]_{(1)} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}_{(1)} = \frac{m_1}{150} \begin{bmatrix} 32 & -32 & \vdots & 16 & -12 \\ -24 & 18 & \vdots & -12 & 9 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 16 & -12 & \vdots & 32 & -32 \\ -12 & 9 & \vdots & -24 & 18 \end{bmatrix}_{(1)}$$

analognim postupkom dalje se izračunavaju podmatrice preostala dva konačna elementa i formiraju njihove podmatrice u globalnom koordinatnom sistemu:

$$[m_{22}]_{(2)} = [m_{33}]_{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{(2)} \frac{m_2}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}_{(2)} = \frac{m_2}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[m_{23}]_{(2)} = [m_{32}]_{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{(2)} \frac{m_2}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}_{(2)} = \frac{m_2}{6} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[m]_{(2)} = \begin{bmatrix} m_{22} & m_{23} \\ m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}_{(2)} = \frac{m_2}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \vdots & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(2)}$$

$$[m_{11}]_{(3)} = [m_{33}]_{(3)} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}_{(3)} \frac{m_3}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}_{(3)} = \frac{m_3}{6} \begin{bmatrix} 32 & 24 \\ 24 & 18 \end{bmatrix}$$

$$[m_{13}]_{(3)} = [m_{31}]_{(3)} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}_{(3)} \frac{m_3}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}_{(3)} = \frac{m_3}{6} \begin{bmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 9 \end{bmatrix}$$

$$[m]_{(3)} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{13} \\ m_{31} & m_{33} \end{bmatrix}_{(3)} = \frac{m_3}{6} \begin{bmatrix} 32 & 24 & \vdots & 16 & 12 \\ 24 & 18 & \vdots & 12 & 9 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 16 & 12 & \vdots & 32 & 24 \\ 12 & 9 & \vdots & 24 & 18 \end{bmatrix}_{(3)}$$

Pri čemu je $m_1 = 5m$, $m_2 = 8m$ i $m_3 = 5m$, a $m = \rho AL\delta$. Smenom u prethodno definisanu strukturu ukupne matrice masa sledi njen numerički oblik:

$$[M] = \sum_{(k)} [m_{rs}]_{(k)} = \frac{m}{30} \begin{bmatrix} 64 & 0 & 16 & -12 & -16 & 12 \\ 0 & 36 & -12 & 9 & 12 & -9 \\ 16 & -12 & 112 & -24 & 40 & 0 \\ -12 & 9 & -24 & 18 & 0 & 0 \\ -16 & 12 & 40 & 0 & 112 & 24 \\ 12 & -9 & 0 & 0 & 24 & 18 \end{bmatrix}$$

Numeričke vrednosti ukupne matrice masa pokazuju da je ona simetrična, što dalje ukazuje na tačnost sprovedenog postupka računanja. Korespondentni vektor pomeraja glasi:

$$\{\delta\} = \{u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad \vdots \quad 0 \quad 0 \quad 0\}^T$$

Uočava se da 3 od ukupno 6 komponenti vektora pomeraja imaju nenultu vrednost, što omogućava da se dimenzije goreizračunata matrica masa redukuju na 3x3, pa sledi:

$$[Ma] = \frac{m}{30} \begin{bmatrix} 64 & 0 & 16 \\ 0 & 36 & -12 \\ 16 & -12 & 112 \end{bmatrix}$$

Mašinski fakultet Univerziteta u Beogradu

Katedra za proizvodno mašinstvo

Laboratorija za kibernetiku i mehatronske sisteme - CMSysLab

Predmet: Projektovanje obradnih sistema

Predmetni nastavnik: Prof. Petar B. Petrović

Beograd 2020.05.04

Osnovna dinamička jednačina MKE i modalna analiza

Polazimo od prethodno izvedene dinamičke jednačine elastomehaničkog sistema modelovanog pomoću konačnih elemenata:

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [B]\{\dot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = \{F(t)\}$$

odakle se, zanemarivanjem disipativne komponente i komponente spoljašnje dinamičke pobude, dolazi do jednačine slobodnih, neprigušenih oscilacija dinamičkog sistema, odnosno do takozvane osnovne dinamičke jednačine metode konačnih elemenata:

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = \{0\}$$

koja se uvođenjem dinamičke matrice sistema $[H] = [M]^{-1}[K]$, svodi na sledeći elementarni oblik sistema linearnih diferencijalnih jednačina drugog reda:

$$\{\ddot{\delta}\} + [H]\{\delta\} = \{0\}, \quad (A)$$

Obratiti pažnju, matrica $[H]$ u opštem slučaju nije simetrična! Partikularno rešenje ovog sistema glasi:

$$\{\delta\} = \{\delta_0\}e^{i\omega t}$$

Posle dvostrukog diferenciranja i smene u (A), sledi:

$$(-\omega^2[M] + [K])\{\delta_0\} = \{0\} \rightarrow (-\omega^2I + [H])\{\delta_0\} = \{0\}, \quad (B)$$

odakle množenjem sa leve strane sa $[H]^{-1}$ i deljenjem sa ω^2 sledi:

$$(-[H]^{-1} + \lambda I)\{\delta_0\} = \{0\}$$

$$\lambda = \frac{1}{\omega^2}$$

Da bi sistem (B) imao realno rešenje, potrebno je da njegova diskriminanta bude veća od nule, odnosno da bude zadovoljeno sledeće:

$$|[H]^{-1} - \lambda I| = 0, \quad (C)$$

Jednačinu (C) nazivamo frekventnom jednačinom sistema i ona se, izračunavanjem determinante svodi na polinom n -tog reda po promenljivoj λ .

Za dalji rad, potrebno je da se izborom odgovarajućeg koordinantog sistema, polazna jednačina (A) svede na karakteristični oblik u kojem je dinamička matrica sistema dijagonalna, odnosno:

$$\{\ddot{q}\} + [A]\{q\} = \{0\}, \quad (D)$$

$$[A] = \text{dijag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

pri čemu je preslikavanje polaznog sistema koordinata $\{\delta\}$ u novouvedeni sistem specijalnih koordinata $\{q\}$ određen relacijom:

$$\{\delta\} = [\mu]\{q\}$$

odakle se smenom u (A) dolazi do sledeće relacije koja određuje vezu između polazne dinamičke matrice $[H]$ i njoj ekvivalentne dijagonalne matrice $[A]$:

$$[\mu]^{-1}[H]^{-1}[\mu]\{\ddot{q}\} + \{q\} = \{0\}, \quad (\text{E})$$

odnosno:

$$[A] = [\mu]^{-1}[H]^{-1}[\mu]$$

Sistem koordinata $\{q\}$ nazivamo glavnim koordinatama sistema, a oblici oscilovanja opisani u glavnim koordinatama nazivaju se glavni oblici oscilovanja. Matricu $[\mu]$ nazivamo modalnom matricom sistema, a promenljivu λ nazivamo sopstvenom vrednošću dinamičke matrice $[H]$.

Primer 1 – nastavak

Smenom podmatrice krutosti $[Ka]$ i podmatrice masa $[Ma]$:

$$[Ka] = \frac{2EA}{125L} \begin{bmatrix} 16 & 0 & -8 \\ 0 & 9 & 6 \\ -8 & 6 & 15.8125 \end{bmatrix}$$

$$[Ma] = \frac{m}{15} \begin{bmatrix} 32 & 0 & 8 \\ 0 & 18 & -6 \\ 8 & -6 & 56 \end{bmatrix}$$

u matričnu jednačinu (B) sistema:

$$\left(-\omega^2 \frac{m}{15} \begin{bmatrix} 32 & 0 & 8 \\ 0 & 18 & -6 \\ 8 & -6 & 56 \end{bmatrix} + \frac{2EA}{125L} \begin{bmatrix} 16 & 0 & -8 \\ 0 & 9 & 6 \\ -8 & 6 & 15.8125 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} u_{01} \\ v_{01} \\ u_{02} \end{Bmatrix} = \{0\}, \quad (F)$$

njenim sredjivanjem dolazi se do diskriminante:

$$\begin{vmatrix} 16(1-2p^2) & 0 & -8(1+2p^2) \\ 0 & 9(1-2p^2) & 6(1+2p^2) \\ -8(1+2p^2) & 6(1+2p^2) & 15.8125+56p^2 \end{vmatrix} = 0$$

čijim se izračunavanjem (izračunavanje vrednosti determinante trećeg reda) dobija frekventna jednačina posmatranog sistema, koja je u ovom slučaju polinom trećeg reda:

$$(1-2p^2)(1125-14922p^2+14976p^4) = 0$$

po uvedenoj pomoćnoj promenljivoj:

$$p^2 = \frac{125mL}{30EA} \omega^2$$

a koja je direktna funkcija kvadrata sopstvene frekvencije ω^2 i mehaničkih i geometrijskih parametara posmatranog sistema (mehaničkih i geometrijskih). Dalje je neophodno izračunati nepoznate vrednosti p^2 . Rešavanje ovog polinoma je relativno jednostavno, jer je algebarskim sredjivanjem već delimično faktorizovan, pa možemo prepoznati dva polinomialna množioca nižeg reda koje treba izjednačiti sa nulom, odnosno množilac prvog reda, $(1-2p^2) = 0$, odakle se direktno izračunava jedna od tri nepoznate vrednosti, odnosno: $(1-2p^2) = 0 \rightarrow p^2 = 0.5$, a zatim i preostale dve rešavajući drugi polinomialni množilac, $(1125-14922p^2+14976p^4) = 0$, primenom pravila za rešavanje jednačine drugog reda, odnosno: $(1125-14922p^2+14976p^4) \rightarrow p^2 = (0.0822, 0.9140)$. Sredjivanjem navedenih rešenja po rastućoj vrednosti dobija se konačno rešenje frekventne jednačine posmatranog sistema, odnosno nepoznate sopstvene vrednosti / frekvencije razmatranog sistema:

$$\begin{aligned} p_1^2 = 0.0822 & \rightarrow \omega_1^2 = 0.0197\omega^{*2} & \omega_1 = 0.140\omega^* \\ p_2^2 = 0.5000 & \rightarrow \omega_2^2 = 0.1200\omega^{*2} & \omega_2 = 0.340\omega^* \\ p_3^2 = 0.9142 & \rightarrow \omega_3^2 = 0.2190\omega^{*2} & \omega_3 = 0.468\omega^* \end{aligned}$$

na osnovu čega se dalje može napisati dinamička matrica sistema u koordinatnoj bazi koju čine glavne koordinate razmatranog dinamičkog sistema:

$$[A] = \text{diag} \left\{ \frac{1}{\omega_1^2}, \frac{1}{\omega_2^2}, \frac{1}{\omega_3^2} \right\} = \frac{1}{\omega^{*2}} \text{diag} \{ 50.687, 8.333, 4.558 \}$$

pri čemu novouvedena pomoćna konstanta ω^* ima sledeću vrednost:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{EA}{mL}}$$

Pažljivim posmatranjem vrednosti konstante ω^* može se primetiti kako ta konstanta predstavlja dobropoznati izraz $\omega_0 = \sqrt{c/m}$ kojim se definiše sopstvena frekvencija jednomasenog oscilatora, jer je sa c označena krutost aksijalno opterećenog štapa koja je definisana takodje dobropoznatom relacijom $c = EA/L$. Vektor konstanti koje su vidljive u izrazu za dijagonalizovanu dinamičku matricu su samo množiocci ovog fundamentalnog fizičkog svojstva svakog elastomehaničkog sistema, kojim se određuje svaka od tri sopstvene frekvencije, odnosno njihov relativni odnos.

Poznavanje skupa sopstvenih frekvencija, omogućava dalje izračunavanje njima pripadajućeg skupa sopstvenih vektora dinamičke matrice sistema. Smenom svake od tri izračunate vrednosti sopstvene frekvencije ω_i^2 u frekventnu jednačinu (F) sledi:

$$\omega_1 = 0.140 \sqrt{\frac{EA}{mL}} \rightarrow \begin{bmatrix} 13.371 & 0 & -8.657 \\ 0 & 7.521 & 6.493 \\ -8.657 & 6.493 & 11.211 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{01} \\ v_{01} \\ u_{02} \end{Bmatrix}_1 = \{0\}$$

$$\omega_2 = 0.340 \sqrt{\frac{EA}{mL}} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 9 \\ -12 & 9 & 12.812 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{01} \\ v_{01} \\ u_{02} \end{Bmatrix}_2 = \{0\}$$

$$\omega_3 = 0.468 \sqrt{\frac{EA}{mL}} \rightarrow \begin{bmatrix} -13.225 & 0 & -15.314 \\ 0 & -7.456 & 6.493 \\ -15.314 & 11.485 & -35.384 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{01} \\ v_{01} \\ u_{02} \end{Bmatrix}_3 = \{0\}$$

Njihovim rešavanjem slede vrednosti tri sopstvena vektora (vektori kolone), koji su normirani u odnosu na prvi član:

$$\{\mu\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ v_{01}/u_{01} \\ u_{02}/u_{01} \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1.333 \\ 1.544 \end{Bmatrix}$$

$$\{\mu\}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ v_{01}/u_{01} \\ u_{02}/u_{01} \end{Bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.333 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{\mu\}_3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ v_{01}/u_{01} \\ u_{02}/u_{01} \end{Bmatrix}_3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1.333 \\ -0.865 \end{Bmatrix}$$

Njihovim grupisanjem u jednu matricnu formu dolazi se do takozvane modalne matrice razmatranog dinamičkog sistema:

$$[\mu] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1.333 & 1.333 & -1.333 \\ 1.544 & 0 & -0.865 \end{bmatrix}$$

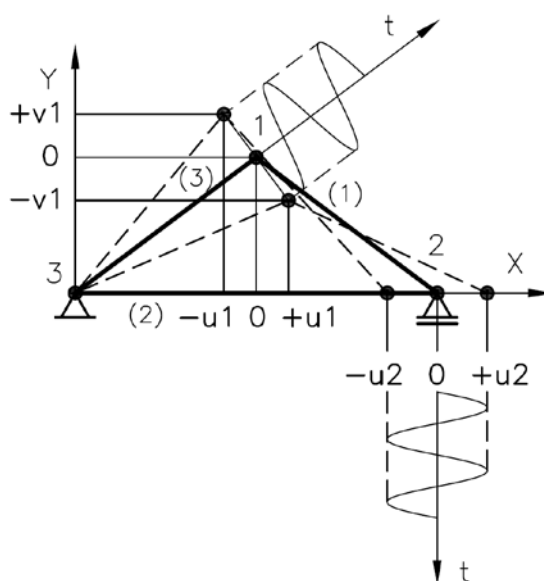
Fizički smisao kolona modalne matrice, odnosno sopstvenih vektora dinamičke matrice $[H]$ je u tome da oni definišu takozvane oblike oscilovanja, odnosno amplitude pomeranja svakog čvora po njegovim stepenima slobode, iskazanim u globalnom koordinatnom sistemu. Dakle, par sopstvena frekvencija i oblik oscilovanja u potpunosti određuju dinamičko ponašanje razmatrane diskretizovane elastomehničke strukture. Ovo se detaljno grafički ilustruje na slici 8, gde se, ucrtavanjem pomeraja za sve čvorove (projekcije ukupne amplitude!) po pojedinim koordinatnim osama, određuje resultantna amplituda, kao i smer oscilovanja na prvoj sopstvenoj frekvenciji ω_1 .

Konkretno, za čvor 1, duž X ose nanose se vrednosti $u_{01} = 1$ u pozitivnom i negativnom smeru. Zatim se to isto radi duž Y ose, nanošenjem vrednosti $v_{01} = -1.3333$ takodje u pozitivnom i negativnom smeru. Treba obratiti pažnju na negativnu vrednost ovog pomeraja. Dalje se za čvor 2 nanosi pomeraj samo duž X ose, ucrtavanjem vrednosti $u_{02} = 1.544$ u pozitivnom i negativnom smeru. Oblici oscilovanja, odnosno krajnji položaji deformisanih konačnih elemenata KE(1) i KE(2) i njima pripadajućim čvorovima 1 i 2 dobijaju se povezivanjem ekstremnih pomeraja isprekidanim linijama, kao što je to prikazano na slici 8. Ovde se uzima u obzir znak pomeraja. Pogledaj sliku 8 pažljivo!

Sinusoide pridružene čvorovima 1 i 2 sa ucrtanom vremenskom osom prikazuje simbolički kako bi svaki od ta dva čvora oscilovali u vremenu, odnosno zamišljenu trajektoriju njihovog kretanja u vremenu. Isprekidane linije pokazuju deformaciju trougaone strukture na prvoj sopstvenoj frekvenciji u ekstremnim položajima, odnosno položajima maksimalne amplitude. Taj oblik nazivamo oblikom oscilovanja na prvoj sopstvenoj frekvenciji. Takodje je bitno da se razume da oblik oscilovanja, odnosno vrednosti amplitude nisu apsolutne.

Vrednosti amplitude datih u modalnoj matrici se mogu množiti bilo kojom konstantom, a uzima se ona vrednost koja omogućava dobru vidljivost (neka vrsta zumiranja, odnosno uvećanja). Bitno je da je konstanta kojom se množe pomeraji pojedinih članova jednaka za sve članove, čime se očuvava relativni odnos pomeraja i time oblik oscilovanja. Takodje, posebno je bitno da se uoči da oba čvora osciluju istom sopstvenom frekvencijom!

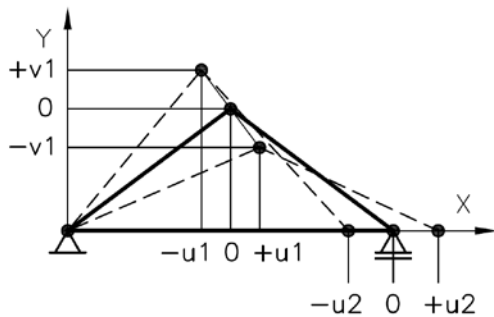
Inače, tokom oscilovanja, štapovi se izdužuju i skraćuju. Dinamika je zato povezana sa njihovom krutošću. Promenom poprečnog preseka utiče se na krutost i time dalje utiče i na ukupna dinamička svojstva razmatrane strukture. Poprečni presek je povezan sa masom, što dalje znači da se dinamička svojstva mogu menjati, i optimizirati, promenom rasporeda mase utrošene za fizičku realizaciju razmatrane elastomehničke strukture.



Slika 8

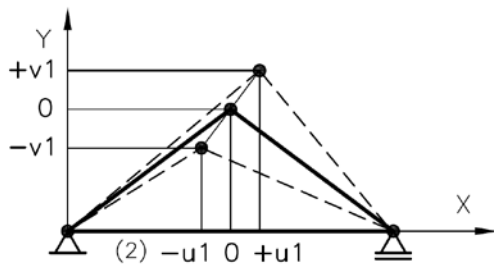
Na slici 9 prikazana su sva tri oblika oscilovanja. Jasno se uočava da se promenom sopstvenih frekvencija menjaju i oblici oscilovanja. Tako, na primer, za drugi oblik oscilovanja karakterističan je nulti pomeraj u čvoru 2 iako on ima slobodu kretanja duž X ose. To praktično znači da KE(3) ne učestvuje u procesu oscilovanja, on ima konstantnu vrednost. Ovo je vrlo interesantna pojava koja ukazuje na to da je moguće upravljanje pomerajima na pojedinim tačkama, što dalje može da se vrlo efikasno iskoristi kod optimizacije dinamike noseće strukture obradnog sistema, koja može da se, rasporedom masa, tako podesi da u nekim zonama od interesa amplitude oscilovanja budu jednake nuli ili značajno manje od ostatka strukture. Ipak, optimizacija najviše ima smisla u odnosu na sopstvene frekvencije. Njih treba tako podesiti da budu što je moguće dalje od pobudnih frekvencija dinamičkih sila koje dolaze od procesa rezanja.

Uz prethodno, treba uzeti u obzir da prikazani oblici oscilovanja, koji su potpuno raspregnuti, u ovakvom obliku postoje samo u matematičkoj analizi. U stvarnosti, svi čvorovi osciluju na svim frekvencijama istovremeno. Superpozicijom ovih partikularnih oscilacija dobijaju se vrlo složeni oblici dinamičkog ponašanja. Naveću energiju, pa samim tim i najveće amplitude nose najniže frekvencije. U analizi složenih struktura, koje mogu da imaju više stotina hiljada stepeni slobode, pa samim tim i toliki broj sopstvenih frekvencije, u obzir se uzimaju samo prve tri frekvencije, one sa najnižim vrednostima.



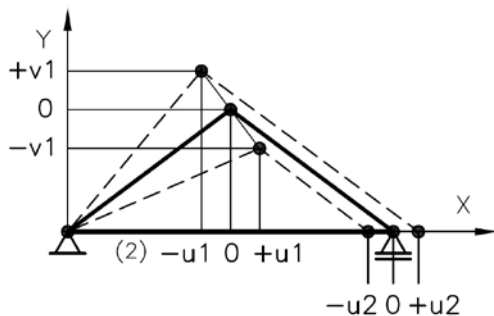
Prvi oblik oscilovanja

$$\omega_1 = 0.140 \sqrt{\frac{EA}{mL}}$$



Drugi oblik oscilovanja

$$\omega_2 = 0.340 \sqrt{\frac{EA}{mL}}$$



Treći oblik oscilovanja

$$\omega_3 = 0.468 \sqrt{\frac{EA}{mL}}$$

Slika 9

Inače, prethodno izvedeni proračun ručnim putem može se vrlo jednostavno sprovesti u Matlab programskom okruženju. Dovoljno je samo par komandi da se ovaj prilično kompleksan zadatak uradi vrlo precizno.

Dinamičku matricu možemo izračunati pomoću samo jedne komande, uz prethodno definisanje matrice krutosti i matrice masa:

$$K = [16 \ 0 \ -8; \ 0 \ 9 \ 6; \ -8 \ 6 \ 15.8125];$$

$$M = [32 \ 0 \ 8; \ 0 \ 18 \ -6; \ 8 \ -6 \ 56];$$

$$H = \text{inv}(M)*K$$

H =

$$\begin{bmatrix} 0.5577 & -0.0433 & -0.3453 \\ -0.0769 & 0.5577 & 0.4603 \\ -0.2308 & 0.1731 & 0.3810 \end{bmatrix}$$

Neposredno iza programskog koda navodi se i izračunata vrednost nepoznate dinamičke matrice. Dakle dinamička matrica razmatranog sistema glasi:

$$[H] = [Ma]^{-1}[Ka] = \frac{6EA}{25mL} \begin{bmatrix} 0.5577 & -0.0433 & -0.3453 \\ -0.0769 & 0.5577 & 0.4603 \\ -0.2308 & 0.1731 & 0.3810 \end{bmatrix}$$

Obratiti pažnju na to da dinamička matrica nije simetrična iako je proizvod dve simetrične matrice (inverzija simetrične matrice uvek kao rezultat daje simetričnu matricu!). Pojava simetrije je specijalni slučaj i javlja se samo kada su množiocu komutativni, odnosno kada važi $\text{inv}(M)*K = K* \text{inv}(M)$.

Dalje se, u MatLab programskim okruženju, nepoznati vektor sopstvenih vrednosti izračunava pomoću komande:

$$[mi, p_2] = \text{eig}(H)$$

mi =

$$\begin{bmatrix} -0.5325 & 0.6000 & 0.4401 \\ 0.7100 & 0.8000 & -0.5868 \\ 0.4609 & -0.0000 & 0.6797 \end{bmatrix}$$

p_2 =

$$\begin{bmatrix} 0.9142 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5000 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0822 \end{bmatrix}$$

Sopstvene vrednosti i, konsekventno tome, sopstveni vektori u ovom slučaju nisu poredjani u rastućem redosledu. Da bi se ovo postiglo, odnosno da bi se izračunate sopstvene vrednosti uredile od najniže ka najvišim, treba dopuniti prethodni kod sa par instrukcija koje u osnovi rade sortiranje sopstvenih vrednosti, memorišu indekse koji određuju njihove pozicije i na bazi tih indeksa preuredjuju polaznu modalnu matricu. Konkretno:

$$[mi, p_2] = \text{eig}(H, 'vector');$$

$$[p_2, ind] = \text{sort}(p_2)$$

$$mi = mi(:, ind)$$

```
p_2 =
```

```
0.0822  
0.5000  
0.9142
```

```
ind =
```

```
3  
2  
1
```

```
mi =
```

```
0.4401 0.6000 -0.5325  
-0.5868 0.8000 0.7100  
0.6797 -0.0000 0.4609
```

Dalje, potrebno je normirati modalnu matricu u odnosu na prvi član kolone, što se u Matlabu jednostavno izvodi na sledeći način:

```
vrsta_1 = mi(1,:)  
mi_norm = bsxfun(@rdivide, mi, vrsta_1)
```

```
vrsta_1 =
```

```
0.4401 0.6000 -0.5325
```

```
mi_norm =
```

```
1.0000 1.0000 1.0000  
-1.3333 1.3333 -1.3333  
1.5444 -0.0000 -0.8656
```

Poredjenjem sa ranije izračunatim vrednostima primećujemo da su međusobno jednake, čime se potvrđuje tačnost oba postupka.

Sumirajući sve prethodno, sledećim Matlab kodom rešava se kompletna modalna analiza, odnosno dinamika razmatrane strukture koja se sastoji iz 3 konačna elementa u obliku štapa za poznate matrice krutosti i mase:

```
close all, clear, clc
```

```
K = [16 0 -8; 0 9 6; -8 6 15.8125]; %matrica krutosti
```

```
M = [32 0 8; 0 18 -6; 8 -6 56]; %matrica mase
```

```
[mi, p_2] = eig(inv(M)*K, 'vector'); %sopstveni vektori i sopstvene vrednosti
```

```
[p_2, ind] = sort(p_2); p_2 %sortiranje sopstvenih vrednosti po rastucem redu
```

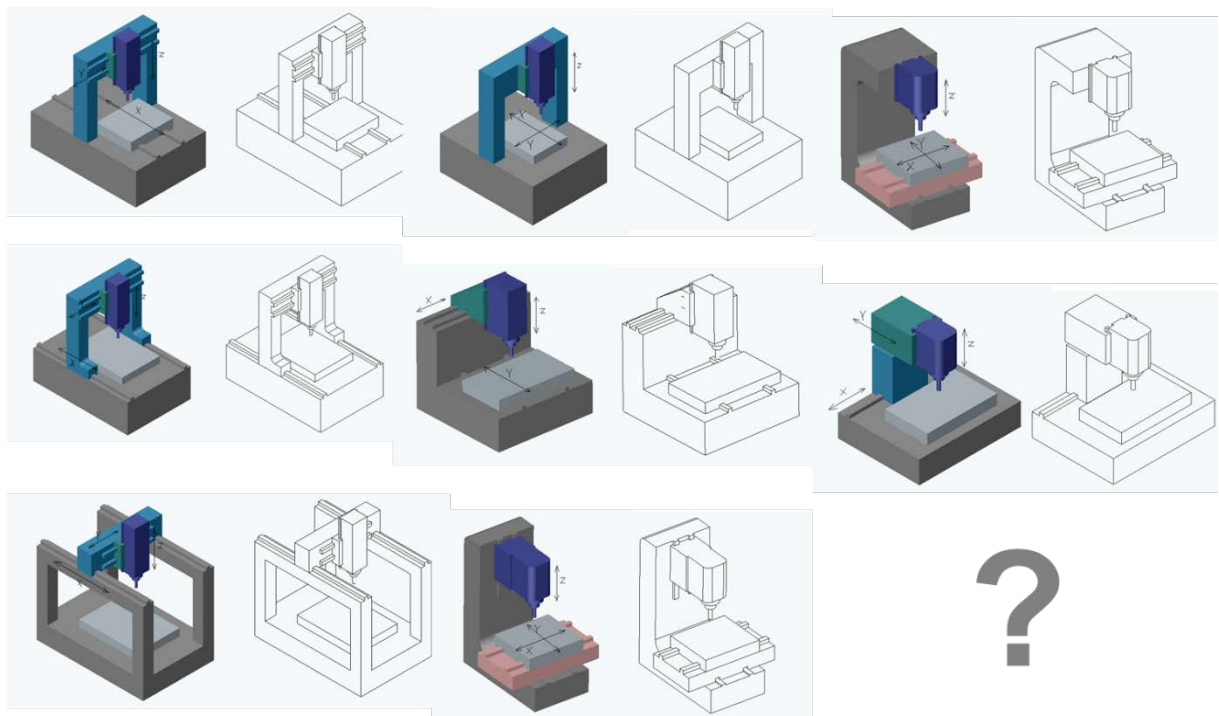
```
mi = mi(:, ind); %prepakivanje modalne matrice prema rastucem redu sopstvenih vrednosti
```

```
mi_norm = bsxfun(@rdivide, mi, mi(1,:)) % normiranje mod. matrice u odnosu na prvi element kolone
```

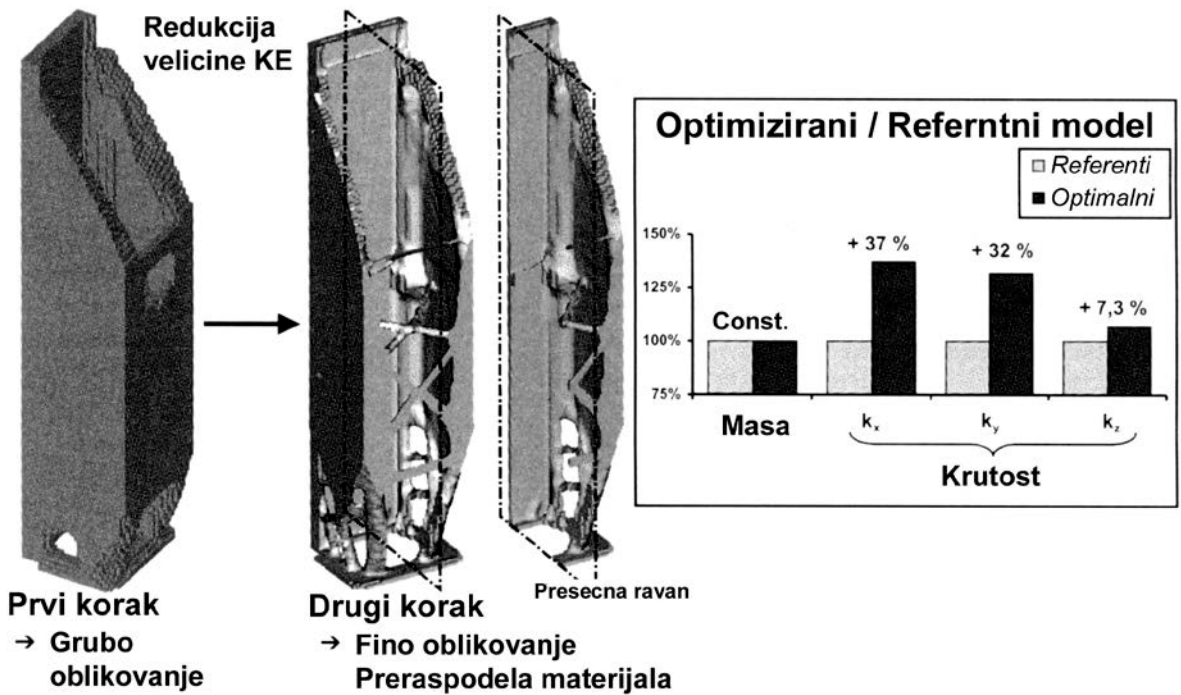
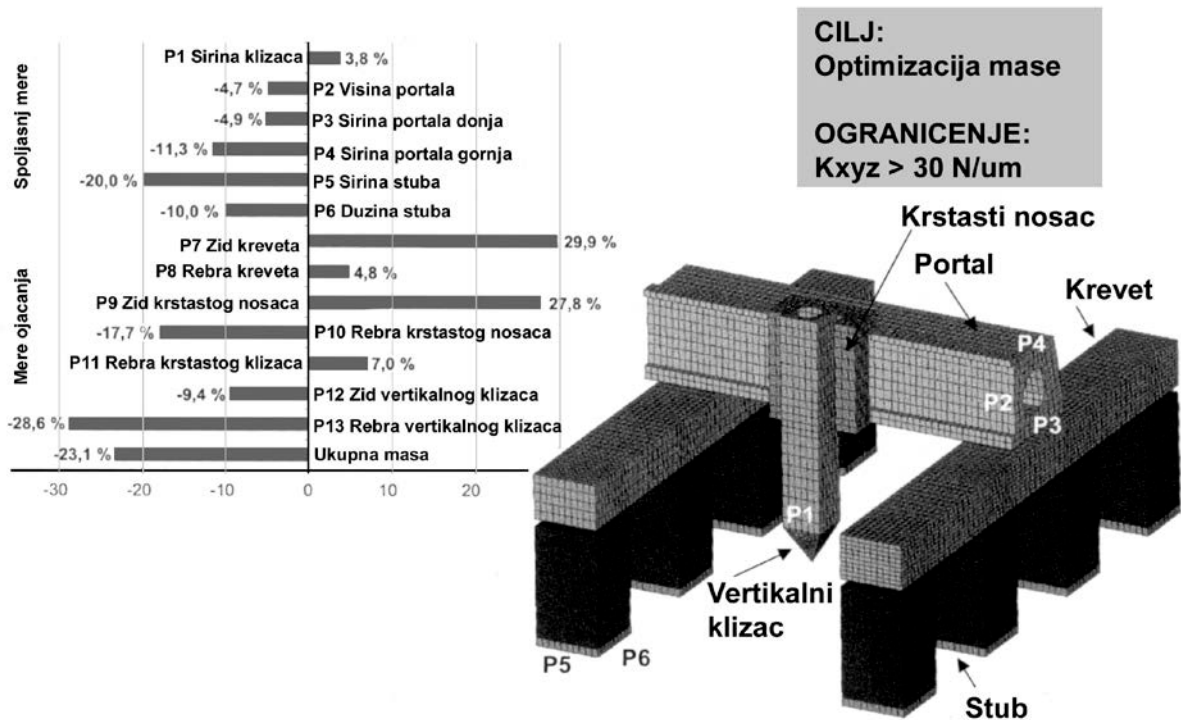
Praktični aspekti projektovanja nosećih struktura obradnih sistema

Noseća struktura svakog obradnog sistema odlučujuće utiče na radne performanse. Mehaniku obradnog sistema, ili još konkretnije, mašine alatke, treba posmatrati kao noseću strukturu na koju su ugrađeni standardni ili specijalni funkcionalni podsistemi/moduli (sistem pomoćnog kretanja koji obuhvata sistem vođenja i sistem aktuacije, zatim sistem glavnog kretanja koji obuhvata prenosnik sa akuatorom i glavno vreteno, zatim sistem radnog stola, i tako redom, do sistema zaštite, odnosno mehaničke pokrivke mašine koja odvaja njenu unutrašnjost od okruženja i obezbeđuje potrebne estetske performanse). Dakle, noseća struktura je integrativni elemenat obradnog sistema, njegova baza koja podsisteme integriše u jednu funkcionalnu celinu sa određenim funkcionalnim performansama. U ovom smislu bitna su dva momenta: a) morfolologija noseće strukture koja dalje određuje morfolologiju kompletnog obradnog sistema i b) tehničke detalje izvođenja noseće strukture, odnosno njenu granulaciju na niže sastavne celine, njihovo međusobno povezivanje i posebno značajno, materijal od kojeg je noseća struktura izvedena.

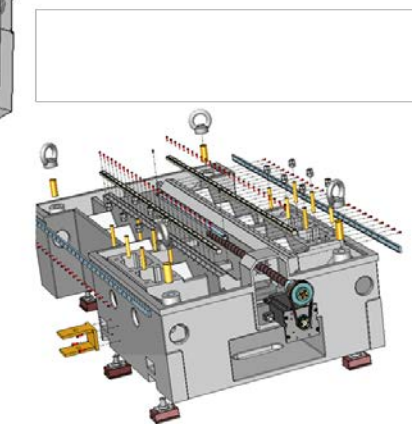
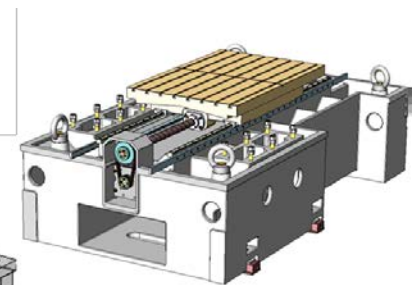
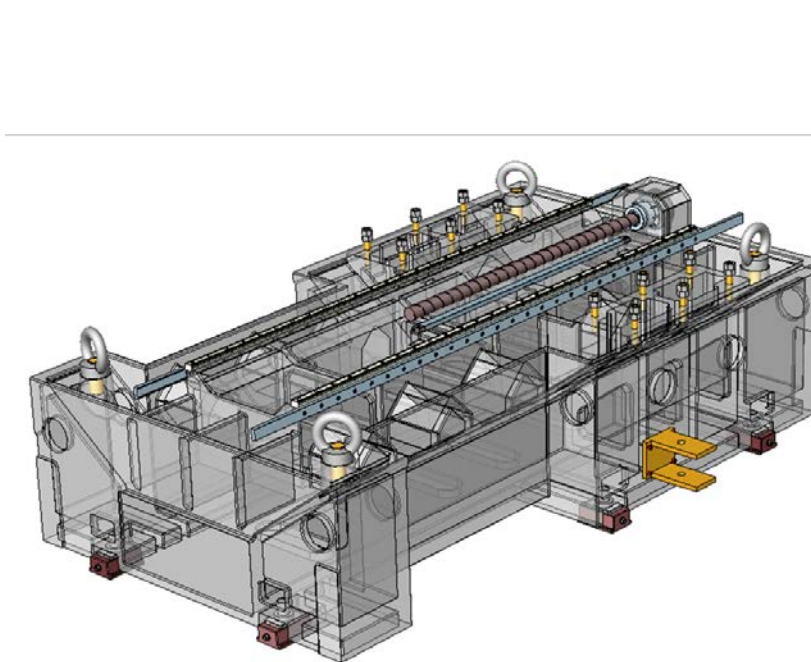
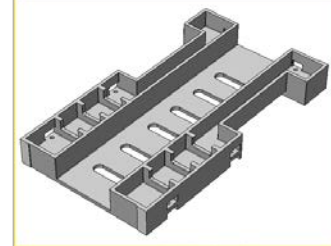
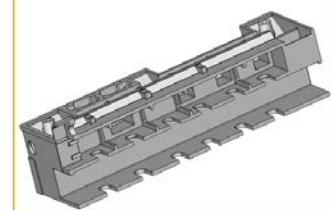
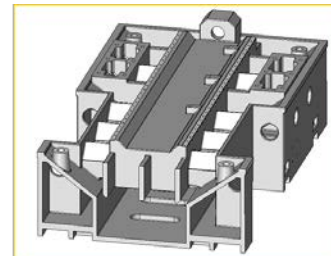
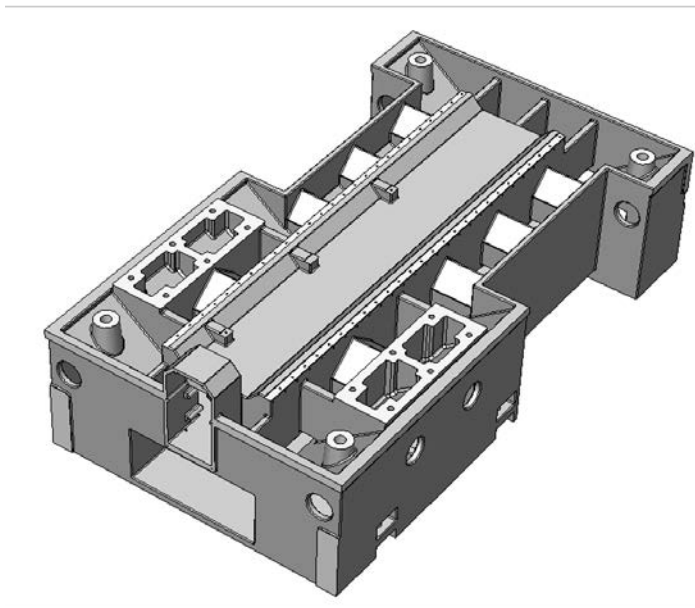
Morfolologija noseće strukture, odnosno ukupnog obradnog sistema povezana je sa njegovim osnovnim oblikom, odnosno nizom vrlo bitnih pitanja u procesu projektovanja i kasnijoj eksploataciji: a) kako su raspodeljene pojedine kinematske funkcije i njihova orijentacija u prostoru, b) zatim kako je na osnovu toga oblikovana noseća struktura i kakve su njene statičke i dinamičke performanse, zatim c) kakve su konsekvence prethodno navedenog na funkciju obradnog sistema, odnosno pristup obratka, operatera, alata, integracija u više organizacione celine i slično i d) kakve konsekvence sve prethodno ima na cenu koštanja. Pitanje morfolologije je delimično rešeno. Vremenom su postavljeni nepisani standardi kako izgleda strug, ili vertikalna glodalica. Ipak, ti nepisani standardi ne sputavaju projektante da stalno eksperimentišu sa morfolologijom, uvode nove morfološke forme i sprovode njihovu analizu kako bi se utvrdile performanse i izabralo optimalno rešenje. Sklad po ovom pitanju je od suštinskog značaja za projektovanje obradnih sistema. Na sledećem primer se pokazuje kako se mogu generisati varijantna morfološka rešenja, a zatim primenom metode konačnih elemenata i drugih metoda optimizacije može postepeno da se dodje do optimalnog rešenja za neki zadati skup unapred postavljenih funkcionalnih zahteva.



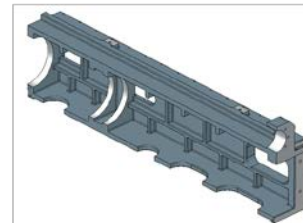
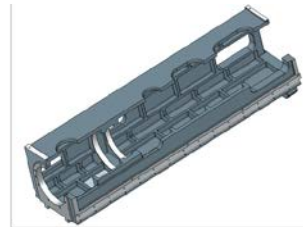
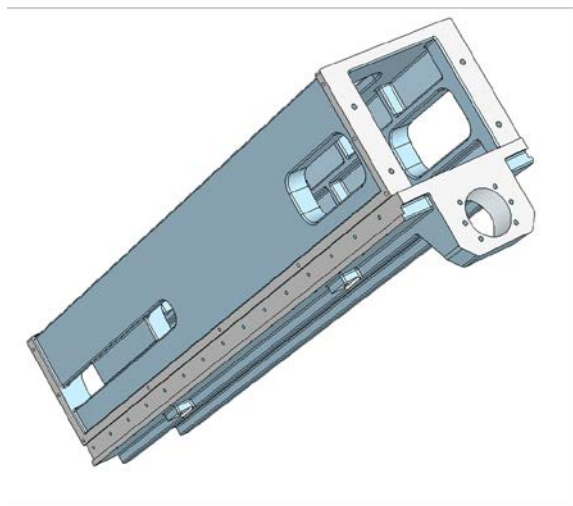
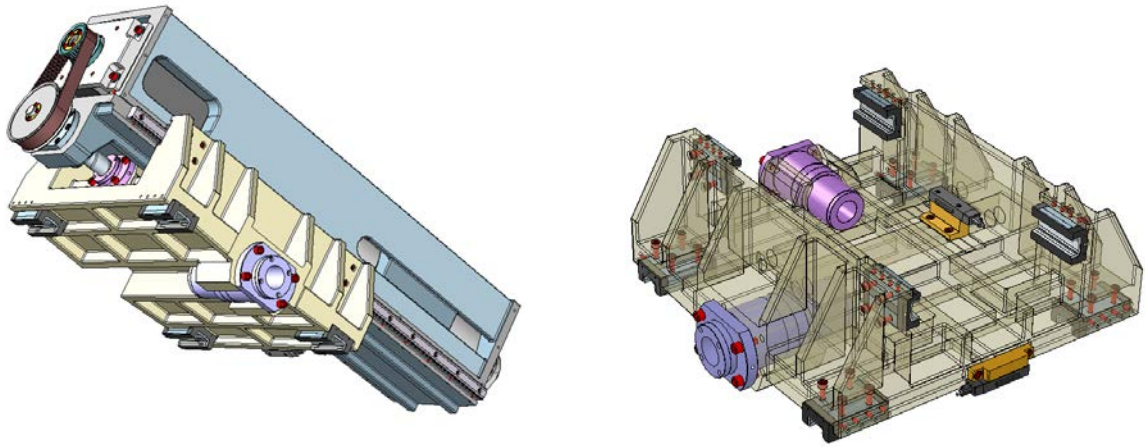
Zatim se za izabranu optimalnu morfološku varijantu provodi detaljna analiza i optimizacija njenih performansi, po pravilu njena statika i dinamika, ali uz uzimanje u obzir i drugih uticajnih faktora povezanih sa tehničkim rešenjima tehnologije izrade noseće strukture i tehničkim rešenjima pripadajućih funkcionalnih podsistema. Sledeći prime ilustruje ovaj drugi nivo optimizacije.



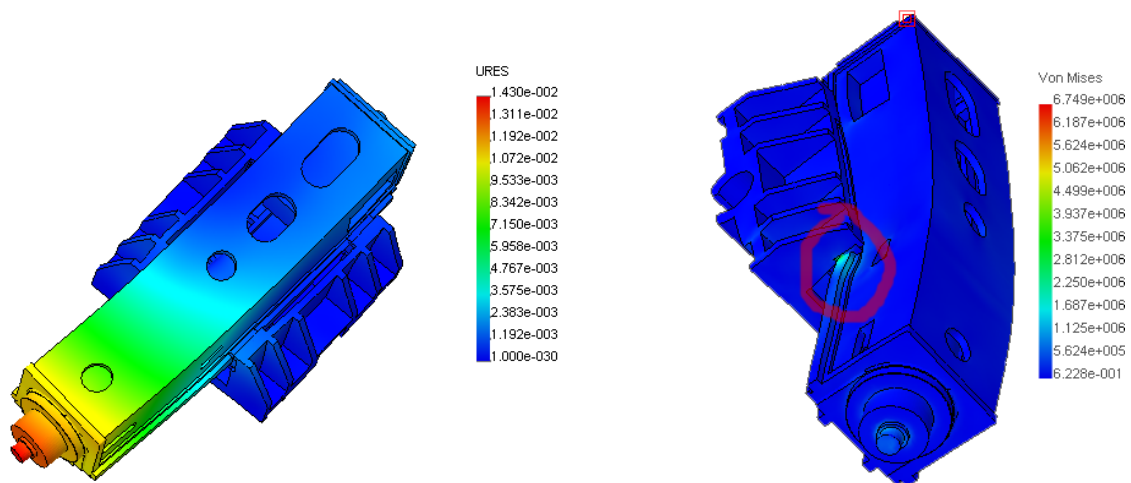
A zatim se sprovodi finalni korak u kojem se optimizirana morfološka struktura dalje oblikuje kako bi se učinila tehnološki optimalnom, odnosno kako bi se njena fizička realizacija optimizovala i tako redukovali troškovi. Konkretni primer ilustruje praktični sadržaj prethodno navedenog. Krevet portalne glodalice sa vertikalnim glavnim vretenom, sem sopstvenih performansi u statičkom i dinamičkom domenu, mora da obezbedi uslove za vezivanje svih ostalih modula obradnog sistema, zatim baziranje mašine kod njene ugradnje, zatim ugradnju sistema vodjenja i pogona pomoćnog kretanja, pa sistema za odvodjenje strugotine, ... U pitanju je vrlo kompleksan proces projektovanja i optimizacije kako bi se došlo do prihvatljivog rešenja koje na zadovoljavajući način ispunjava postavljene funkcionalne zahteve.



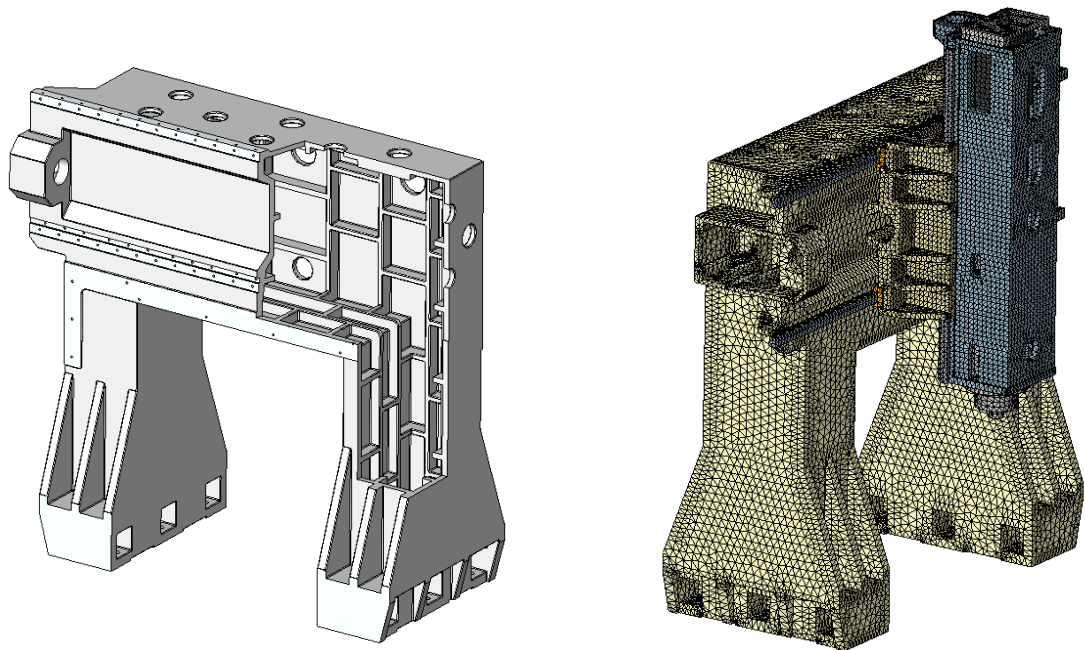
Slično se radi i sa podsklopom modula z-ose koja u sebi nosi i glavno vreteno, a koja takodje obezbedjuje i spregu sa x-osom traverze, preko takozvanog krstastog stola (on u sebi integriše kretanja duž z i x ose).



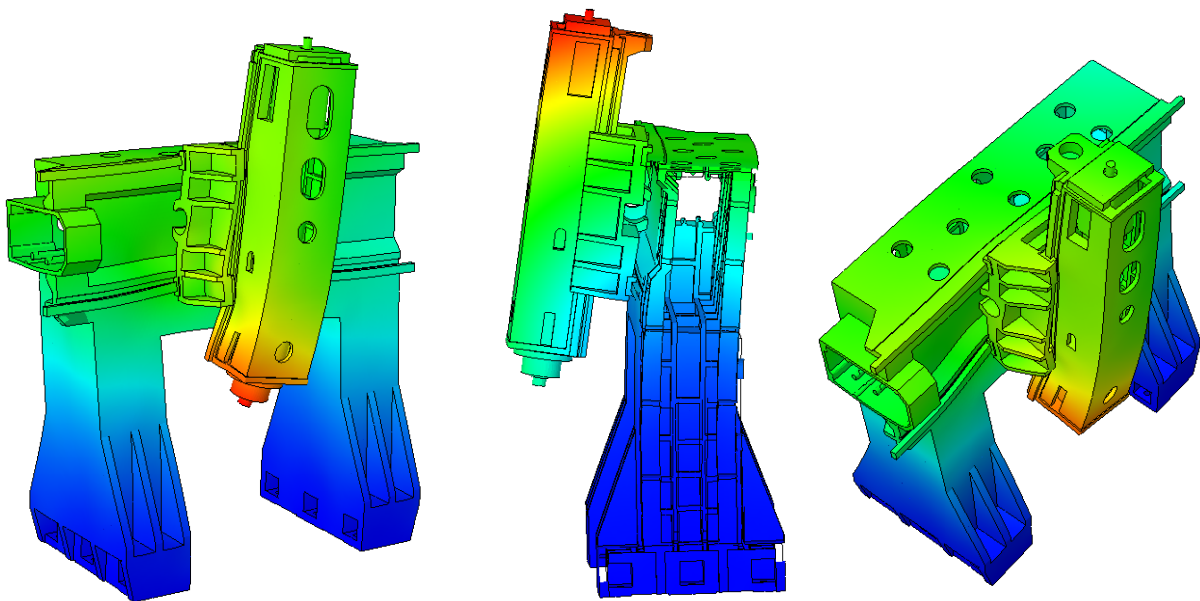
detalji proračuna statike, pomeraji (levo) i naponi (desno):



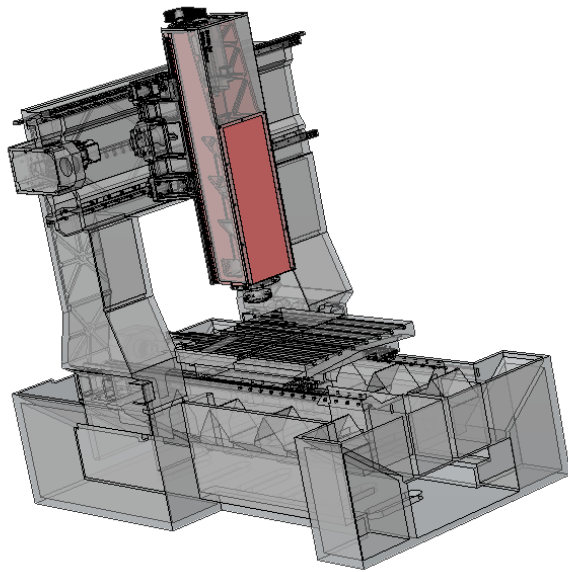
Analogno prethodnom, proces optimizacije se sprovodi i za podsklop traverze.



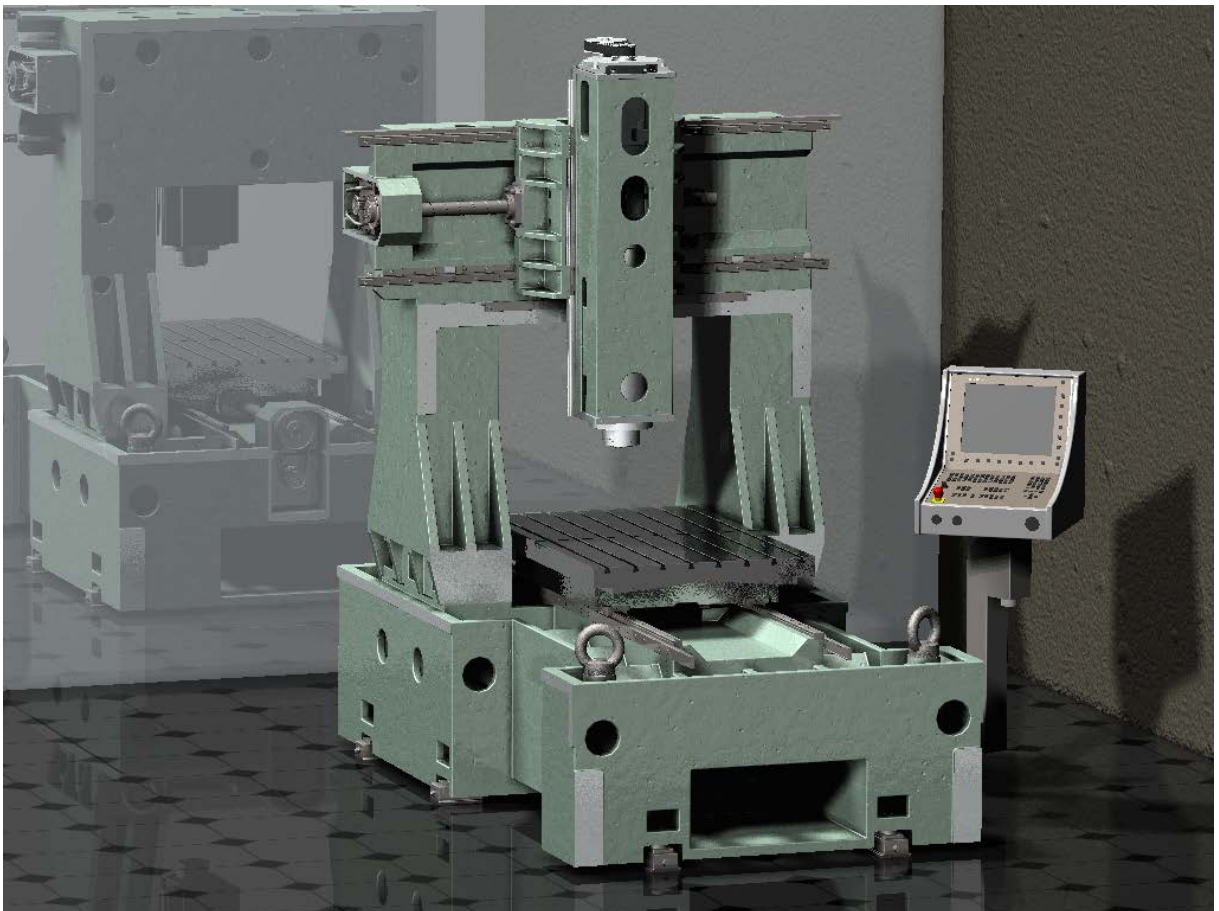
Tri moda oscilovanja traverze za tri najniže sopstvene frekvencije:



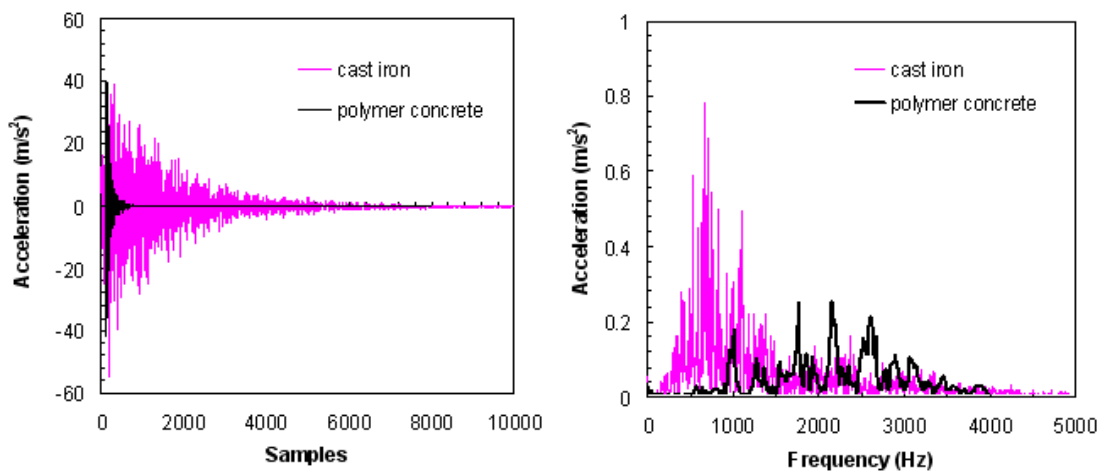
I tako postupno, se dolazi do konačnog rešenja: portalne vertikalne glodalice.



CAD model koji je korišćen za statičku i dinamičku analizu i optimizaciju, dalje se može iskoristiti i za vizuelizaciju, pa i za rešavanje estetike ukupnog obradnog sistema.



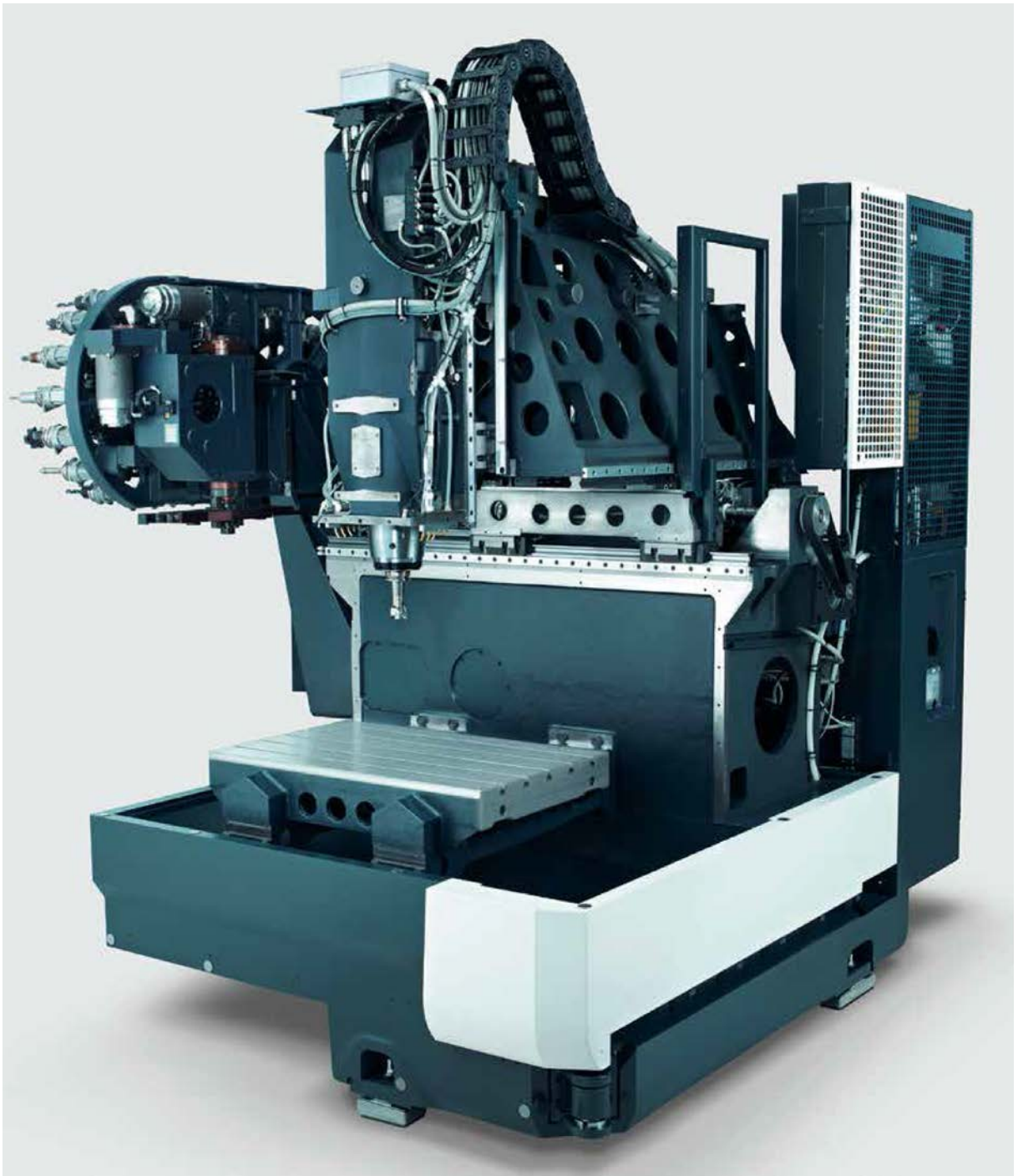
Izbor materijala za izradu noseće strukture je od izuzetnog značaja, podjednako sa aspekta tehnologije izrade, koliko i sa aspekta funkcionalnih performansi. Tradicionalno, noseća struktura obradnih sistema se izrađuje od sivog liva. Njegova zrnasta struktura sastavljena od metalnih kristala i uključina grafita poseduje odlična svojstva disipacije vibracija, što dalje daje odlične dinamičke karakteristike obradnog sistema. Moderni obradni sistemi se najčešće izrađuju od čeličnih limova, primenom tehnologije zavarivanja. Mada bitno jeftinija i ekološki prihvatljivija, tehnologija zavarenih nosećih struktura poseduje bitno lošija dinamička svojstva. Kao kompromis, savremena istraživanja u ovoj oblasti idu u smeru primene nemetalnih kompozitnih materijala, konkretno polimernih betona, koji se sastoje iz kamenih zrnaca, vlaknastih dodataka za armiranje i smola za integraciju takve strukture u kompaktni materijal koji može da primi i prenosi opterećenja statička i dinamička. Tehnologija polimernih betona je prilično složena za praktičnu primenu, takodje pojavljuju se teškoće kod mehaničkog povezivanja sa modulima i sastavnim delovima obradnog sistema, ali sa druge strane ona je ekološki najkvalitetnije rešenje, i sa aspekta dinamike nudi najbolje performanse, uz istovremenu najmanju osetljivost na temperaturne dilatacije. Dalje se, kao primer, navode dinamičke karakteristike i izgled noseće strukture struga izradjenog od polimernog betona. Mada nudi niz prednosti u odnosu na tehnologiju livenih i zavarenih nosećih struktura, tehnologija nosećih struktura izradjenih od polimernih betona je još uvek u fazi ispitivanja i konačni sud o njenim ukupnim svojstvima će tek biti donet u vremenu koje je pred nama.



Od sivog liva i čeličnih limova ka nemetalnim kompozitima za izradu nove generacije nosećih struktura obradnih modernih sistema bitno unapredjenih statičkih i dinamičkih performansi, a konsekventno, performansi tačnosti i produktivnosti (bolja dinamika omogućava bolju produktivnost!).



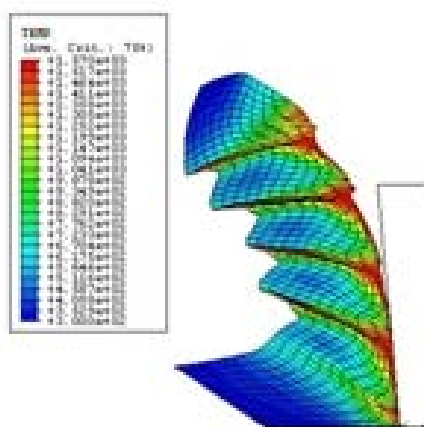
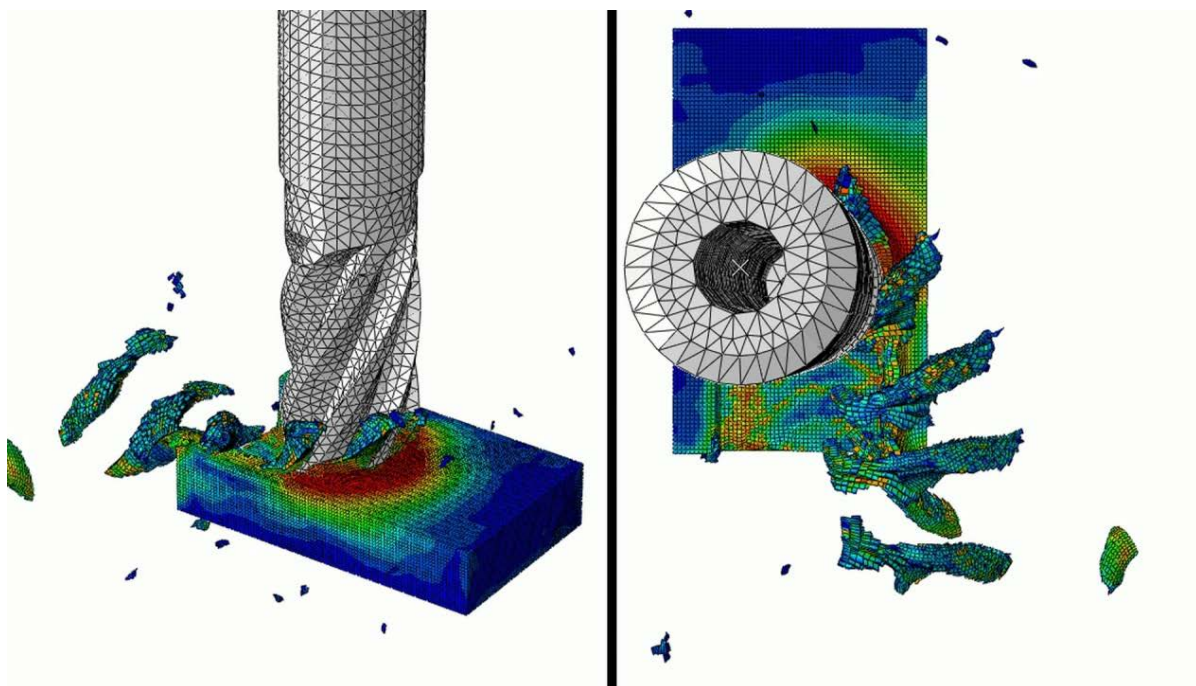
Novi materijali uvek nude nove mogućnosti. To ima posledice na projektovanje. Projektovanje obradnog sistema čija će noseća struktura biti izradjena od nemetalnog kompozita, bitno se razlikuje od tradicionalnog projektovanja, kao što se razlikuje i tehnologija izrade. Pojavljuju se sasvim neočekivani izazovi i sasvim nova rešenja. Umesto livenja ili zavarivanja, koji se odvijaju u dobro poznatom ambijentu industrije prerade metala, rad sa kompozitima baziranim na nemetalnim strukturama, polimerima i slično, dešava se u ambijentu koji dobrim delom podseća na ambijent koji srećemo u građevinarstvu. Razlika se pojavljuje i u proračunu primenom konačnih elemenata. Kompoziti su neuniformne strukture, anizotropne, sa svojstava koja zavise od mnogo faktora koji jednostavno nisu postojali kod metala, koji su posmatrani kao linearne strukture. Kompozitne strukture su po pravilu visokonelinearne i rad sa njima zahteva izgradnju novog inženjerskog aparatusa za proračun i optimizaciju. Obrada, je takodje problem za sebe, nešto sasvim novo, radikalno drugačije od obrade metala. Implikacije postoje i u svim drugim detaljima tehničkih rešenja, kao na primer u načinu na koji spajamo delove, gde se umesto zavrtnajskih razdvojivih veza primenjuje tehnologija lepljenja, a u slučaju potrebe razdvojivosti veze, zavrtnajski spojevi se ostvaruju preko navojnih uemtaka koji se za nemetalnu noseću strukturu vezuju lepljenjem.



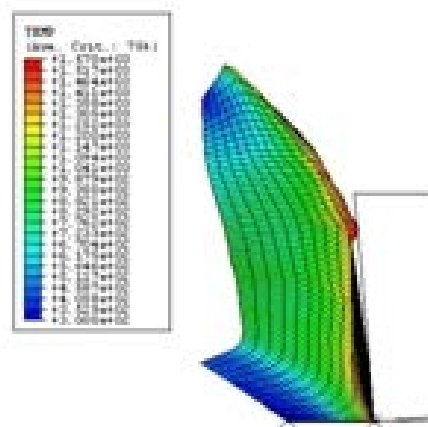
Izgled vertikalnog cnc obradnog sistema sa nosećom strukturom izradjenom od polimernog betona.

Pored proračuna i optimizacije noseće strukture, metoda konačnih elemenata se može uspešno primeniti za modeliranje procesa rezanja. Proces rezanja podrazumeva odvajanje materijala, a to znači da je to viskonelinearan proces koji zahteva i mogućnost promene topologije mreže konačnih elemenata. Posebne tehnike omogućavaju ispunjavanje ovog zahteva. One su ekstenzija linearnih modela sa kojima smo se upoznali, uvođenjem iterativnosti. Smisao iterativnosti je u tome da se parametri linearnog modela menjaju tako da omogućavaju rad sa nelinearnim elastomehaničkim svojstvima materijala i istovremeno i promenom topologije mreže. To je zapravo jedan vrlo dugi niz koraka u kojem je svaki od njih baziran na linearnim modelima, a zbirno je nelinearan. Primer vizuelizacije rezultata ovakvog proračuna, odnosno simulacije prikazan je na sledećoj slici, za slučaju procesa glodanja. Ovakvim pristupom se može simulirati bilo koji proces obrade sa odvajanjem i bez odvajanja materijala. Kod

obrade odvajanjem materijala, ovakav pristup omogućava istraživanje uticaja parametara rezanja na proces formiranja strugotine, fundamentalni fenomen koji utiče na sve aspekte obradnog sistema. Primer ovog detalja se takodje navodi na narednoj slici.



v_rezanja=100m/min



v_rezanja=20000m/min